DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Trabajo de investigación tutelada

Habilidades visuales de los alumnos del Grado de Educación Primaria al detectar regularidades geométricas en un tejido

Jordi Alba Rodríguez

Granada, 2012

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Habilidades visuales de los alumnos del Grado de Educación Primaria al detectar regularidades geométricas en un tejido

Trabajo de investigación tutelada realizado bajo la dirección de los doctores Pablo Flores Martínez del Departamento de Didáctica de la Matemática y Rafael Ramírez Uclés, de la Escuela Universitaria de Magisterio “La Inmaculada” de la Universidad de Granada, que presenta Jordi Alba Rodríguez para su aprobación por el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

D. Jordi Alba Rodríguez

Vº Bº de los directores

Dr. D. Pablo Flores Martínez | Dr. Rafael Ramírez Uclés

Granada, 2012

Este estudio se realizó dentro del grupo de investigación *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico* de la Universidad de Granada (FQM193), perteneciente al Plan andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía, en la línea de investigación Formación del profesorado de Matemáticas.

Agradecimientos

Agradecimientos.

A Pablo Flores Martínez, por haber sido mi mentor en el apasionante mundo de las matemáticas desde que comencé mis estudios universitarios, ilusionándome y motivándome hasta convertirme en una mejor persona. Por haber compartido sus conocimientos e intereses, además de haber apostado por mí y nunca tirar la toalla.

A Rafa Ramírez, por haber sido una fuente interminable de ayuda, compartiendo sus conocimientos e investigaciones sobre el campo de estudio, además de ser un compañero de trabajo cercano y que siempre ha estado disponible incondicionalmente.

A cada uno de los profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática con los que he tenido la oportunidad de compartir su sabiduría en sus clases. Especialmente a la profesora Encarnación Castro, por sus clases y por la ayuda que me presto en la inscripción del master, siempre desde la amabilidad que le caracteriza.

A mi familia por su apoyo y confianza, especialmente a mis padres por todo lo que tengo y todo lo que soy, siempre desde el cariño y la compresión.

Para terminar, quiero agradecer y dedicar mi trabajo a Rosana, por ser la persona con la que tengo la suerte de compartir todos los momentos que nos da la vida. Por su apoyo y compromiso en mis proyectos, además de la energía diaria que me aporta.

Índice

Introducción

La enseñanza actual de la geometría tiene una intención funcional, que se concreta en desarrollar el sentido espacial de los alumnos. Mirar el espacio con sentido supone desarrollar la visualización con la ayuda de los elementos geométricos que permiten organizar las formas en el espacio. Para que los alumnos tengan sentido espacial, los profesores de matemáticas de primaria tienen que desarrollarlo y ser capaces de generarlo en sus alumnos. Es por esto que en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada se ha propuesto una práctica dentro de la asignatura Matemáticas y su Didáctica, para que los alumnos desarrollen el sentido espacial, mediante el estudio de las regularidades que aparecen en un tejido como la Pata de Gallo.

El presente Trabajo de Fin de Máster, del Máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, comienza describiendo el marco teórico, mediante la identificación de la forma en que se concibe la enseñanza de la geometría en el currículo español de primaria, así como en otros currículos, como los estándares americanos del NCTM. Posteriormente se describe el concepto de visualización estableciéndose un marco que lo caracteriza (Gutiérrez, 1996), en el que se ubican los elementos que lo integran, entre ellos las habilidades de visualización, que se definen con precisión, empleando las enunciadas por Del Grande (1990) inspiradas en las de Hoffer (1977). Est0a caracterización nos lleva a definir el área problemática de la investigación. Además se incluye parte de un estudio geométrico de la Pata de Gallo, utilizando los avances alcanzados en una beca de iniciación a la investigación y en un artículo (Alba y Flores, 2011), que se nos han servidor como fuente de información geométrica para nuestro trabajo.

El capítulo segundo describe los objetivos y preguntas de investigación, en el que partimos de un objetivo general, del que surgen unos objetivos específicos, finalizando el capítulo con una serie de preguntas que intentaremos dar respuesta con nuestro trabajo. El capítulo tercero abarca el marco metodológico de investigación, señalando el tipo de investigación y sus características, definiendo los elementos de la misma y describiendo el procedimiento de análisis. En el capítulo cuarto se indican los resultados, explicando los procedimientos de codificación y conversión de las respuestas de los alumnos en información sobre las habilidades de visualización que ponen en juego.

El capítulo 5 resume las conclusiones del trabajo, indicando las expectativas y limitaciones del mismo. Se completa con la bibliografía, y los anexos en los que se incluyen las pruebas realizadas para obtener los datos, así como los enunciados de la práctica empleada en clase.

Capítulo 1. Marco teórico y definición del problema

Este primer capítulo está dedicado a describir el marco teórico que guía nuestra investigación, así como a definir el problema en el que se centra nuestro estudio.

Comenzaremos analizando los distintos currículos nacionales e internaciones (NCTM, RD 1513), referentes a la enseñanza de la geometría, lo que nos lleva a apreciar la importancia de que los alumnos desarrollen su sentido espacial. Para lograr este desarrollo, los maestros tienen que tener sentido espacial, por lo que describimos el contexto en el que se realiza la investigación, la formación de maestros en la Facultad de Educación de la Universidad de Granada, dentro de la asignatura Bases Matemáticas para la educación Primaria de primer curso en el Grado de Maestro de Primaria, del curso 2010-2011.

Esta contextualización da paso a presentar las ideas que fundamentan el trabajo desde la enseñanza de la geometría y la relación con el sentido espacial, especialmente el papel de la visualización y su significado, concretándolo en la propuesta de Gutiérrez (1992) que define la idea de visualización en geometría, analizando los elementos que la integran. Entre ellos aparecen las habilidades de visualización que se utilizan en algunas actividades de geometría, que caracterizamos mediante la clasificación que hace Del Grande (1990).

Una vez definida el área problemática y el marco teórico, presentamos una revisión bibliográfica de trabajos relacionados con el nuestro, para conocer el estado de la cuestión, lo que nos dará oportunidad de definir con precisión el problema de investigación y las preguntas y objetivos.

1.1. Enseñanza de la geometría, sentido espacial

En la enseñanza de la geometría tiene especial relevancia el sentido espacial y a su vez el desarrollo de las habilidades de visualización, siendo un medio para contribuir a la mejora del razonamiento deductivo a través de las distintas representaciones y modelos a los que se enfrentan el alumnado. Veamos cómo se propone la enseñanza de la geometría en los decretos oficiales y en otros documentos profesionales de educación primaria, los estándares del NCTM americano.

1.1.1. **Currículo de geometría en primaria**

El alumnado de Educación primaria trabajara en esta etapa sobre formas y estructuras geométricas, según el Real Decreto 1513/2006 de enseñanza mínimas de educación primaria (MEC, 2006), en referencia a geometría. Para ello no solo deberá definir elementos geométricos, tendrá que pasar a otro nivel cognitivo en el que requerirá entre otros procesos, modelizar, clasificar, construir, dibujar, etc., a través del desarrollo de la capacidad para visualizar las relaciones geométricas. Los procesos indicados son el medio para el desarrollo de las habilidades de visualización y éstas al desarrollo del pensamiento matemático, a través del sentido espacial.

En el decreto se incide en la doble función de la matemática, aprender por utilidad para otros ámbitos, como la vida cotidiana o el mundo laboral, y por su papel formativo, pues desarrollar destrezas para potenciar las capacidades cognitivas. Se indica que la formación matemática en primaria debe ser eminentemente basada en experiencias, basadas en el mundo familiar mediante la resolución de problemas, que le den oportunidad de realizar aprendizajes más complejos posteriormente.

El bloque de contenidos de geometría se organiza en torno a tres puntos: identificar formas geométricas del entorno natural y cultural, para lo que tienen que conocer estos elementos geométricos, la orientación, o desarrollo de la capacidad para situar en el espacio objetos y sus relaciones, y las formas planas y espaciales, incluyendo la atención a las regularidades y movimientos que se realizan con estas formas.

Se aprecia en ello el énfasis en la identificación y manejo de las componentes geométricas, pero atendiendo también a la creación de imágenes mentales de las mismas. Con esto se destaca el papel de la visualización, que se ve reforzado con la alusión específica a la orientación, es decir, a la organización de las formas en relación a unas referencias que les permitan ubicarlas.

Como vemos aparecen las componentes que se destacan en el sentido espacial, señalando explícitamente tres de ellas (formas geométricas, movimientos y regularidades y orientación), pero aludiendo a la visualización al aludir a las acciones que se realizan con las formas (identificar –en distintas situaciones-, caracterizar, transformar, etc.).

La idea de sentido espacial se relaciona estrechamente con la competencia matemática, concretada en la enseñanza de la geometría. Pero también contribuye a destacar la visualización la alusión a otras competencias, pues la competencia para el conocimiento e interacción con el mundo físico tiene que hacer posible una mejor comprensión y una descripción más ajustada del entorno. Con el desarrollo de la visualización (concepción espacial), los alumnos mejoran su capacidad para hacer construcciones y manipular mentalmente figuras en el plano y en el espacio (MEC, 2006).

Como hemos podido comprobar, el currículo de primaria en España recoge la visualización como un elemento mediador importante en el desarrollo de la competencia matemática a través del sentido espacial.

1.1.2. NCTM estándares geometría y visualización

Los referentes curriculares de los docentes americanos (NCTM, 2000) manifiestan la interacción entre la geometría y la visualización a través de sus estándares para la enseñanza de la geometría. En estos referentes se hace especial alusión a los elementos visuales, en uno de sus apartados, recoge que:

"Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:

1. *Analizar las características y propiedades de figuras geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas.*
2. *Localizar y describir relaciones espaciales mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación.*
3. *Aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas.*
4. *Utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas*" (NCTM, 2000, p.43).

Estos aportes están muy relacionados con las ideas del R.D. 1513 y motivan la necesidad de desarrollar el sentido espacial. En este contexto, Ramírez (2012) en su tesis doctoral sintetiza las ideas expuestas anteriormente sobre la enseñanza de la geometría, y caracteriza el constructo sentido espacial compuesto por cuatro componentes, agrupados en dos aspectos:

a) Creación y manejo de elementos y conceptos geométricos, que se relaciona con la capacidad 1, abarcando el trabajo con formas geométricas, pero también con las transformaciones y regularidades de las mismas, relacionado con la capacidad 3

b) Destrezas para relacionarse con el medio, que se relaciona con la capacidad 2, ligada a la orientación, o capacidad para situarse y situar los objetos, y con la capacidad 4, relacionada con la visualización, o capacidad para tener un buen manejo de las imágenes que sustentan el entorno.

Observamos que estas indicaciones de los estándares profundizan sobre la intencionalidad funcional del aprendizaje geométrico, concordando con la tendencia actual de considerar que la enseñanza debe ir encaminada a que el alumno adquiera competencias (saber, saber hacer y aplicar a situaciones de la vida cotidiana) para desenvolverse con mayor soltura en el medio.

Estos dos aportes (el currículo actual de geometría en educación primaria en España, y las directrices del NCTM), nos permiten indicar que la intención del aprendizaje geométrico es desarrollar el sentido espacial del alumno, cubriendo estas cuatro componentes.

1.2. Contexto: Geometría en la formación de maestros

Para desarrollar el sentido espacial de los niños, el maestro debe tener desarrollado este sentido, mediante la atención a todas las componentes del mismo. Por lo tanto, los programas de formación deben atender a estas componentes.

Una de las componentes a trabajar en la formación de maestros es la visualización, partiendo de fenómenos que muestren la pertinencia de su estudio, por su proximidad a la realidad.

Desde el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada se han introducido prácticas para desarrollar la visualización, partiendo de situaciones reales, por lo que se pensó en analizar un tejido con motivos geométricos, en concreto la teselación denominada *Pata de Gallo.* Es por ello que se ha propuesto una práctica de la asignatura Bases Matemáticas para la educación Primaria de primer curso en el Grado de Maestro de Primaria en la Universidad de Granada. Con ella se pretende que los estudiantes analicen esta teselación, a partir de imágenes del tejido, encontrando regularidades geométricas, a través de una serie de actividades y empleando dos grupos de materiales y recursos: los espejos, papel transparente e instrumentos de dibujo, para analizar regularidades, y el programa interactivo Geogebra, para construir la teselación, empleando sus herramientas.

A través de actividades como ésta, que es la que utilizaremos para nuestra investigación, se puede llegar a que los futuros docentes entiendan la geometría como un punto de encuentro entre la matemática escolar y las matemáticas de la realidad que todos los días nos muestran las construcciones, los objetos, los tejidos, los carteles, etc. Pero sobre todo se le está dotando a los futuros docentes de herramientas para crear otras actividades que partan de la realidad.

Una fuente importante para matematizar la realidad es la visualización, esto es lo que da razón a nuestro trabajo, ya que a través del desarrollo de las habilidades visuales podemos ayudar a comprender mejor las matemáticas y especialmente la geometría. Por eso nos interesa analizar las habilidades visuales que tienen los maestros en formación para ver si las pueden poner en práctica en su futura docencia. En los siguientes apartados describimos qué se entiende por visualización y fundamentamos su importancia en el desarrollo del sentido espacial. Antes de ello vamos a analizar el motivo geométrico utilizado en la práctica.

1.3 La pata de gallo.

Fruto de una beca de iniciación a la investigación, hemos llevado a cabo análisis matemáticos de objetos del entorno. En trabajos previos habíamos analizado la decoración del mobiliario urbano, llegando a la conclusión de que tiene que reunir dos cualidades: resolver problemas técnicos y presentar un aspecto que resulte agradable a los ciudadanos, por lo que seleccionamos uno de ellos, las farolas cubistas de la Gran Vía (Alba y Flores, 2009) y analizamos sus formas geométricas, llegando a construir uno de sus desarrollos planos.

Posteriormente hemos estudiado el tejido de la Pata de Gallo, estableciendo algunas apreciaciones que nos han facilitado la puesta en práctica de este trabajo de investigación didáctica. Adjuntamos en anexo 6 el texto de la comunicación que presentamos en las XV JAEM, celebradas en Gijón, en julio de 2011. A continuación resumimos algunas ideas del mismo, con las que clarificamos el tejido, sus regularidades geométricas y los elementos importantes de la teselación empleada en la práctica.

La Pata de Gallo es el dibujo bicolor de ciertos tejidos, caracterizado por la repetición de pequeñas figuras concretas. Los colores tradicionales son el negro y el blanco, aunque en la actualidad otros colores sustituyen al negro. La pata de gallo (*hounds-tooth* en inglés, literalmente *diente de perro de caza)* proviene de la lana tejida de los Lowlands escoceses, aunque hoy en día se emplean muchos otros materiales. Se obtiene al alternar bandas de cuatro hilos claros con cuatro hilos oscuros en un telar de urdimbre y trama con un trenzado sencillo 2:2, esto es, dos hilos por encima de la urdimbre y dos por debajo, avanzando un hilo en cada paso (figura 1). Parte de realizar una urdimbre de bandas de cuatro hilos, alternando el blanco y el negro (figura 2). Lo cruzamos con la lanzadera que da cuatro pasos de cada color, con la regularidad expresada (pasando 2 por encima y 2 por debajo, avanzando un hilo).

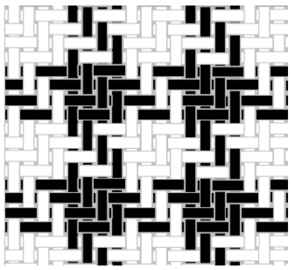


Figura 1. Enlazado de la Pata de Gallo

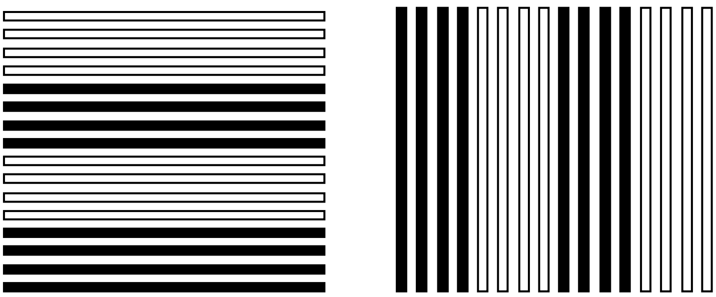


Figura 2. Trama y urdimbre en la Pata de Gallo

Dejando de lado el estudio del trenzado que lo genera, que también puede extenderse matemáticamente, nos ocupamos del teselado ideal, que surge por repetición de un polígono que sugiere las dos figuras que le dan nombre (Pata de Gallo, en español, o diente de perro de caza, en inglés).

Para su estudio debemos distinguir dos etapas, examinar la repetición del polígono sin considerando sólo las líneas que los delimitan, y estudiar la composición bicolor. En este trabajo nos detendremos en el estudio de los contornos, sin ocuparnos de los colores.

El contorno de la teselación de la Pata de Gallo es un teselado no regular. Para estudiarla comenzamos por identificar la figura que lo forma. La Pata de Gallo está formada por un polígono irregular cóncavo y simétrico, de 14 vértices y lados, con ángulos múltiplos de 45º, cinco de ellos mayores de 180º (figura 3).

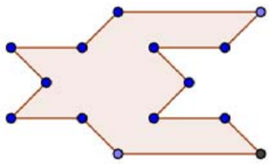


Figura 3. Polígono que genera la Pata de Gallo

El polígono se puede descomponer de distintas formas mediante otros polígonos (figura 4).

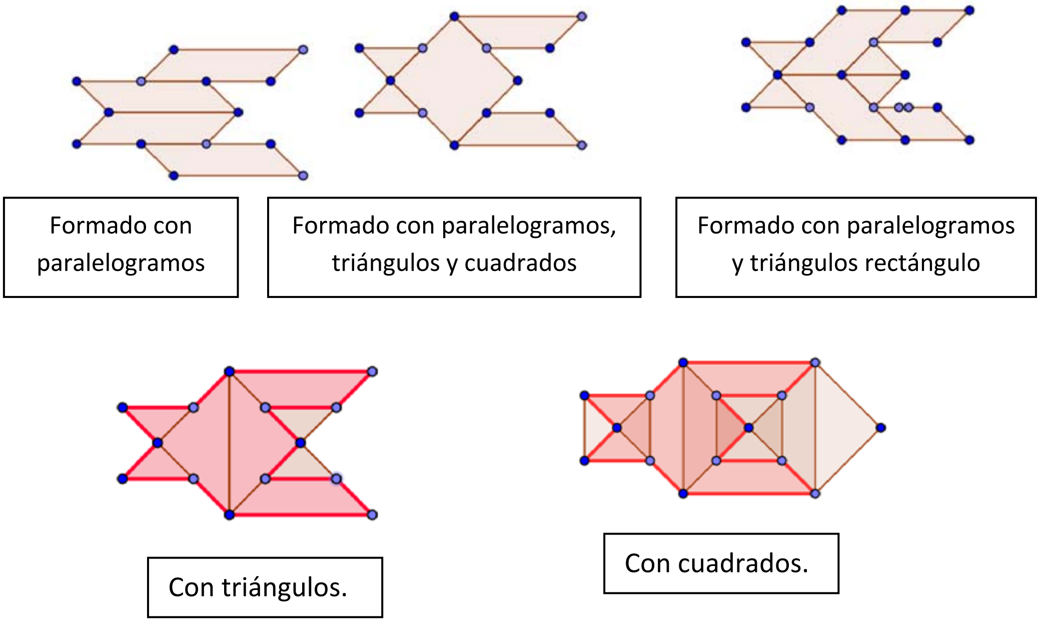


Figura 4. Formación del polígono de la Pata de Gallo a partir de diversos polígonos

A continuación estudiaremos los movimientos e isometrías que nos llevan a la creación del teselado de la Pata de gallo. Comenzamos con la figura original y hacemos traslaciones de vector ***v*** de módulo la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles que hemos empleado en su construcción, y luego con traslaciones de vector ***u***, perpendicular al ***v*** y con el mismo módulo, para llegar al teselado final de la Pata de Gallo (figura 6).

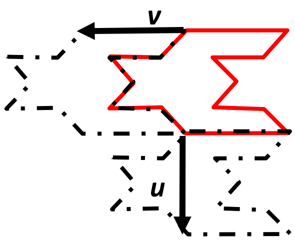


Figura 5. Generación del teselado a partir del polígono.

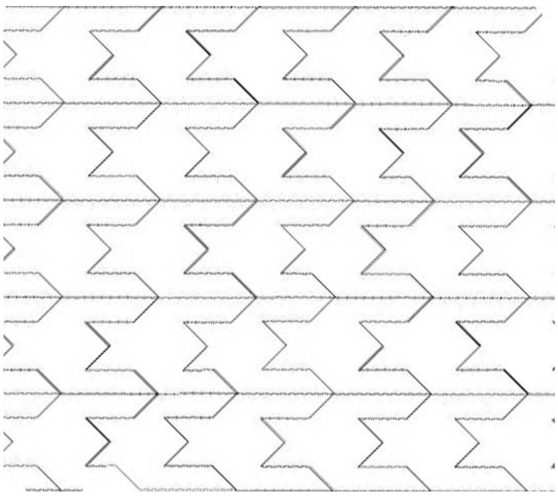


Figura 6. Teselado completo

En lugar de la segunda traslación, se puede obtener por reflexión respecto a rectas con la dirección de ***v*** situadas sobre los lados de la figura que corresponden con los catetos del triángulo rectángulo e isósceles con el que hemos dibujado la tesela. La construcción del teselado no es única por sus regularidades. En la figura 5 observamos que es invariante al aplicarle traslaciones de vectores ***v*** y ***u***, (y múltiplos enteros de ***u*** y ***v***, naturalmente), pero también respecto a reflexiones de ejes según la dirección del vector ***v***, situados en los lados más externos de la tesela. No es simétrico respecto a rectas que tengan la dirección del vector ***u***, pues la figura original tiene un solo eje de simetría, con la dirección del vector ***v***.

Para buscar una baldosa que genere este teselado, estudiamos si es un teselado tipo Escher, es decir, que se puede obtener a partir de un teselado regular. Como hemos apreciado en la tesela, todos los ángulos son múltiplos de 45º, la hemos construido a partir de cuadrados (y triángulos rectángulos e isósceles, medios cuadrados), lo que nos lleva a ver que deriva del teselado cuadrado. En la figura 7 se puede ver como quitando y añadiendo las distintas piezas se obtiene la figura original. Hemos dibujado 8 maneras diferentes, pero el proceso es continuo, luego la baldosa cuadrada puede situarse en cualquier posición intermedia a las dibujadas.

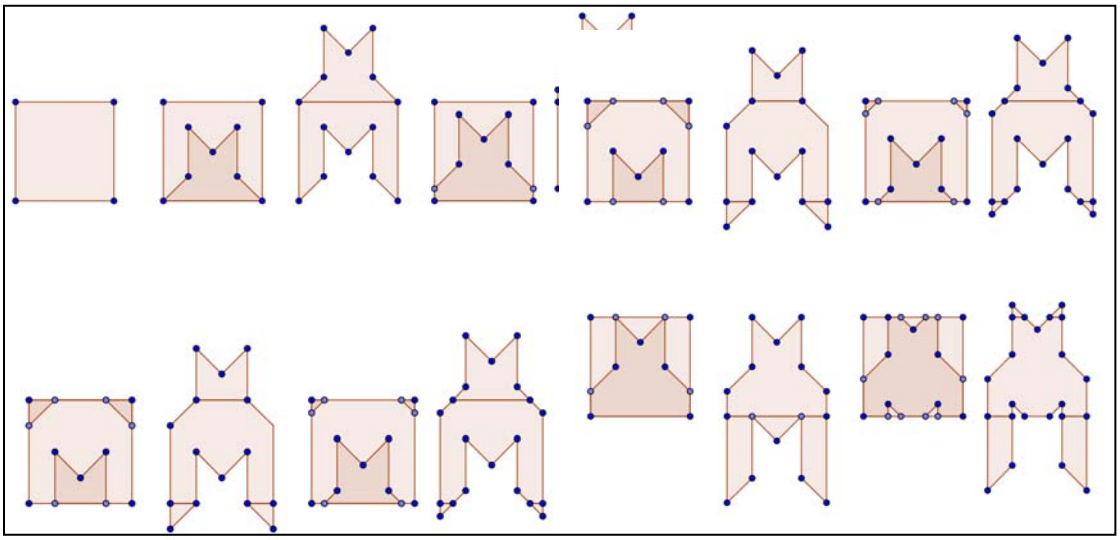


Figura 7. Construcción de la baldosa cuadrada

1.4 Marco Teórico

El marco teórico de nuestro trabajo se fundamenta en alguno de los componentes del sentido espacial, como es la visualización. A continuación mostraremos una descripción general de la visualización con algunas definiciones, para una mejor compresión, además de destacar su importancia en la didáctica de la matemática. Posteriormente mostraremos el modelo de visualización geométrica de Gutiérrez (1996).

1.4.1 Visualización

En numerosos documentos se ha destacado la importancia de la representación de los conceptos matemáticos. Las representaciones son imágenes externas que sirven para aludir a estos conceptos. En su análisis del papel de las representaciones, Encarnación Castro y Enrique Castro (1997) señalan: *Cada ser humano lleva en sí mismo, en sus facultades de percepción sensorial, una vía de acceso al conocimiento. (…) Los sentidos desempeñan un importante papel en los procesos de aprendizaje que requieren la mediación de la inteligencia. (….) El conocimiento matemático se percibe y se transmite, prioritariamente, mediante dos canales; el auditivo y el visual.* (Castro y Castro, 1997, p. 95).

Como vemos, la audición de mensajes y la percepción de imágenes externas son claves en el proceso de aprendizaje-enseñanza de las matemáticas. La captación de imágenes externas, mediante la creación de imágenes internas y la construcción de relaciones entre ellas, es una primera idea sobre visualización. En este trabajo nos centramos en la visualización puesta en juego al resolver tareas de aprendizaje, concretamente examinaremos las habilidades visuales que manifiestan al resolver tareas de identificación geométrica los alumnos del Grado de Educación Primaria.

Concretaremos más la idea de visualización, mostrando definiciones de visualización dadas por algunos investigadores en educación matemática.

Dreyfus (1995) define imaginería visual como el uso de imágenes mentales con un fuerte componente visual. Presmeg (1994) define imagen visual como la escena mental que representa información visual o espacial, con o sin la presencia de una representación externa y las clasifica en pictóricas concretas, patrones, imágenes de fórmulas, cinestésicas y dinámicas.

Arcavi (2003) siguiendo las definiciones de Zimmermann y Cunningham (1991) y Hershkowitz *et al*. (1989), señala que la visualización es la habilidad, el proceso y el producto de la creación, la interpretación, el uso y reflexión acerca de dibujos, imágenes, diagramas en nuestra mente, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de describir y comunicar información, pensando y desarrollando previamente ideas desconocidas y avanzando entendimiento

Utilizando la definición que hace Gutiérrez (2006), entendemos la visualización como el conjunto de tipos de imágenes, procesos y habilidades necesarios para que los estudiantes de geometría puedan producir, analizar, transformar y comunicar información visual relativa a objetos reales, modelos y conceptos geométricos

Norma Presmeg en su ponencia en el Trabajo de grupo 20, Visualización en la enseñanza y aprendizaje de la matemáticas, impartida en el ICME 11 de 2008 (Presmeg 2008), señaló que los aspectos visuales de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas han ganado una mayor atención en las últimas tres décadas, habiéndose mostrado útiles varias teorías para interpretar los resultados de las investigaciones empíricas en este campo.

Entre estas teorías destaca la propuesta de Ángel Gutiérrez, de la Universidad de Valencia, de la que Presmeg (2006) referencia el documento que elaboró Gutiérrez (1996), *Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework*, para el 20 PME. En este documento hace una unificación de teorías (Bishop, 1989; Del Grande, 1990; Presmeg, 1986) para identificar la visualización.

Para explicar con más detalle estos elementos y su interacción, analizaremos los aspectos relativos a imágenes y representaciones y unificaremos los relativos a procesos y habilidades, completando con la presentación del marco teórico establecido por Gutiérrez (1996).

Presmeg (1986) realizó una clasificación de cinco tipos de imágenes para las matemáticas: imágenes concretas pictóricas, de fórmulas, de patrones, cinéticas y dinámicas. Lo que hace referencia a representaciones mentales que el individuo tiene de los objetos físicos, de las relaciones, de los conceptos. Estos procesos mentales son los que el individuo utiliza en las distintas tareas matemáticas.

Bishop (1989) señala que la visualización tiene dos tipos de procesos en el uso de imágenes, también mentales, diferenciando entre procesamiento visual (VP) e Interpretación de información figurativa (IFI). El primero se refiere a la conversión en imágenes de información abstracta o no figurativa y también el proceso de transformación de unas imágenes visuales ya formadas en otras. El segundo es un proceso de compresión e interpretación de representaciones visuales para extraer la información que contienen.

Los estudios de Presmeg y Bishop analizan la visualización como cualidad para el aprendizaje matemático, sin centrarse en algún contenido específico. Para referirnos a la visualización en geometría, utilizamos el modelo elaborado por Gutiérrez (1996), en la que considera la visualización integrada por cuatro elementos principales:

1. Imagen mental: tipo de representación cognitiva de un concepto o propiedad matemática por medio de elementos visuales o espaciales.

2. Representación externa: cualquier tipo de representación gráfica o verbal de conceptos o propiedades, incluyendo dibujos, esbozos, diagramas, etc., que

ayudan a crear o transformar imágenes mentales y hacer razonamiento visual.

3. Procesos de visualización: acciones mentales o físicas en que están involucradas las imágenes.
4. Habilidades de visualización para realizar los procesos necesarios con imágenes mentales específicas para un problema dado. Dependen del problema matemático a resolver y de las imágenes creadas.

1.4.2 Habilidades de visualización

El papel de las imágenes es muy importante, pero su tratamiento investigador es complejo, pues no es fácil apreciar qué y cómo se manejan estas imágenes. Nos vamos a centrar en las habilidades de visualización que ponen en juego los futuros maestros. Para ello nos basamos en la propuesta de Del Grande (1990), quien según Gutiérrez hace "*Una relación bastante detallada de la habilidades que pueden integrar la percepción espacial de un individuo, obtenida uniendo las propuestas de diversos autores y que se refiere a un contexto más amplio que el de la geometría*" (Gutiérrez, 1992, p. 45).

Del Grande (1987, 1990) hace una recopilación de las habilidades necesarias para realizar los procesos anteriores con las imágenes, seleccionadas a partir de los trabajos de Hoffer (1977). De esta forma propone **siete habilidades de visualización** de la percepción visual en geometría, necesarias para integración de la percepción visual, y da algunas características de las mismas. Son las siguientes:

a) Coordinación ojo-motor: habilidad para seguir con los ojos el movimiento de los objetos de forma ágil y eficaz.

b) Percepción figura-contexto: habilidad para reconocer una figura aislándola de su contexto.

c) Conservación de la percepción: habilidad para reconocer que un objeto matemáticos mantiene su forma aunque este girado o no pueda verse en su totalidad.

d) Percepción de la posición en el espacio: habilidad para la relacionar la posición de un objeto con un mismo o con otro objeto.

e) *Percepción de las relaciones espaciales:* habilidad que permite identificar correctamente las características de las relaciones entre diversos objetos situados en el espacio.
f) *Discriminación visual.* Habilidad que permite comparar varios objetos identificando sus semejanzas y diferencias visuales.
g) *Memoria visual.* Habilidad para recordar las características visuales y de posición que tenían en un momento dado un conjunto de objetos que estaban a la vista pero que ya no se ven o que han sido cambiados de posición.

1.4.3 Área problemática de investigación

Una vez definidos los elementos del marco teórico concretamos que pretendemos estudiar qué habilidades visuales ponen en juego los alumnos de Grado de En Educación Primaria a la hora de enfrentarse a la tarea de detectar regularidades geométricas en un tejido.

Con objeto de delimitar esta área problemática, pasamos a continuación a hacer la revisión bibliográfica de problemas similares, antes de definir el problema preciso.

1.4.4 Estado de la cuestión

Esta revisión bibliográfica es una parte importante de nuestro trabajo, ya que nos interesa dar credibilidad y legitimidad a la investigación (Cohen y Manion, 2006). Hemos revisados las actas del 36º congreso del PME, los grupos de trabajo *Visualización en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas* de los ICME de 2008 y de 2012, además de otras investigaciones recogidas de diferentes fuentes de información que son relevantes para nuestro estudio. Una fuente importante ha sido la reciente tesis doctoral de unos de los directores del trabajo (Ramírez, 2012).

En el 11º ICME celebrado en Monterrey en 2008, se recogen una gran variedad de trabajos relacionados con nuestro campo de estudio en las que se refuerza las ideas de la importancia de la visualización y el marco teórico de Gutiérrez (1996). En concreto en el artículo de Presmeg (2008) presentado para tal ocasión, recalca la necesidad de una visión unificada de la estructura y los componentes de una teoría de la función de representación visual, indicando que el marco de Gutiérrez (1996) va encaminado al aprendizaje de las matemáticas.

Algunas comunicaciones presentadas se ocupan de las imágenes y sus correspondientes elementos. Así, Acuña y Larios (2008) precisan que el aprendizaje de la geometría necesita prototipos visuales (modelos anteriores de referencia), por lo que los alumnos que no disponen de ellos encuentran dificultades en su aprendizaje. Gagatsis, Panaoura, Elia, Stamboulidis y Spyrou (2008) señalan que los alumnos tienen dificultades para establecer conexiones y relaciones entre los diferentes modelos de representación y no consiguen dar una definición adecuada al concepto de eje de simetría.

Otras aportaciones sobre la visualización en matemáticas son más generales. Rodríguez, Montiel y Cantoral (2008), señalan que la visualización puede ayudar a los estudiantes a predecir la convergencia o divergencia en el estudio de funciones, permitiéndoles los resolver desequilibrios cognitivos. Soto (2008) señala que la visualización se puede entrenar, especialmente al trabajar en grupo, tanto para los estudiantes como para los profesores. Van Blerk, Christiansen y Anderson (2008) concluyen que se puede mejorar el reconocimiento de las representaciones, incluso de los diagramas más complejos de los teoremas, a través de un entrenamiento de la capacidad visual.

Los trabajos presentados en el 12º ICME, celebrado este año en Seúl, tienen menor relevancia para nuestro trabajo, ya que están más ligados al empleo de las TIC en la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Destacamos tres investigaciones concretas. En un estudio con alumnos en edad preescolar dirigido a explorar el desarrollo de sus habilidades matemáticas, se concluyó que una serie de actividades centradas en la visualización puede estimular el desarrollo de las habilidades espaciales (van Nes & de Lange, 2012). Lee, Cho y Song (2012) indagan sobre cómo pueden mejorar alumnos de educación primaria con baja habilidad visio-espacial, a través de actividades en la que se estimula la creación de imágenes 3d con el cuerpo. También hay aportes acerca de la transición de imágenes 2D a 3D con el programa *Cabri*, en las que la visualización de las primeras (2D) ayuda a la resolución y compresión de las segundas (Hattermann, 2012).

De la revisión del 36º PME celebrado en Taipei, Taiwan, destacamos los aporte del grupo de discusión: *Visualization in Mathematics Education: Towards a Future Research Agenda* (Visualización en Educación Matemática: Hacia una futura agenda de investigación), en el que se discuten las posibles líneas de investigación. Se hace referencia al artículo de Presmeg (2006), para distinguir entre objetos de visualización, visualización introspectiva e interpretaciones de la visualización, discutida con los aportes que hizo Gutiérrez (1996) sobre los términos representación externa, imagen mental, y proceso de visualización. Profesores de la UNED de Madrid estudian el uso del video en la construcción de imágenes visuales externas, para que el alumnado pueda construir imágenes mentales que le causan mayores dificultades. Concluyen indicando que el vídeo como recurso educativo puede ampliar la visualización matemática y mejorar el aprendizaje (Rúbia, 2012). Otro aportación interesante es el estudio de Forythe (2012), que analiza cómo pueden comprender mejor elementos de geometría euclídea, estudiantes de 13 años, a través del “arrastre” empleado en Software de Geometría Dinámica, ya que suministra posibilidades visuales que les ayuda a conceptualizar las construcciones geométricas.

Nuestro estudio pretende indagar sobre las habilidades visuales de los futuros profesores, partiendo de que estas contribuirán a desarrollar actividades que influyan sobre la visualización de los estudiantes. Otras investigaciones revisadas analizan esta conjetura.

De los estudios que relacionan el uso de la visualización de los profesores y de los alumnos (Pitta-Pantazi y Christou, 2009; 2010), destacamos el de Presmeg (2006) en el que estudia la relación entre los resultados de los alumnos y el tipo visual del profesor, encontrando poca relación entre la visualización matemática de los profesores y su utilización en clase.

En un estudio anterior, Presmeg (1986) afirmaba que lo más efectivo es procurar en profesores y alumnos el pensamiento ambidiestro, es decir, estar capacitados para emplear métodos visuales y métodos o no visuales. Coincide en ello con Zazkis, Dubinsky y Dautermann (1996) que proponen un método alternativo para describir el proceso de enseñanza, que combina el método visual con las estrategias analíticas.

La influencia del uso de la visualización del profesor en el trabajo de sus alumnos queda manifestado en los estudios de Zodik y Zaslavsky (2007), en los que presentan ejemplos de diagramas usados en las lecciones de geometría y señalan la importancia de que el profesor sea consciente del potencial impacto que tiene sobre el aprendizaje de sus alumnos. Los autores indican que las imágenes pueden ayudar o perjudicar (por pérdida de generalidad, por ejemplo) y muestran ejemplos de cómo la utilización de un determinado prototipo en un problema puede llevar a una resolución incorrecta. Realizan un estudio sobre la elección y el uso de ejemplos en las clases de matemáticas, observando 54 lecciones de 5 profesores diferentes, que imparten a 15 grupos de estudiantes de primaria (3 y 6 grado) y secundaria (9 grado). Consideran que siete de las clases fueron de alto nivel y 6 de nivel medio y bajo, concluyendo que la elección de ejemplos es un aspecto significativo del conocimiento del profesor y debería formar parte de los programas de educación

En un estudio sobre el desarrollo de las habilidades, medidas con un test, a 40 estudiantes para profesores de matemáticas se les paso un test de visualización "Purdue Spatial Visualization" antes y después del experimento. Usaron Cabri 3D durante 8 semanas. El análisis en las diferencias de los test muestra que el soporte informático contribuyó al desarrollo de las habilidades espaciales (Guven y Kosa, 2008).

En el contexto de alumnos con talento matemático, Ramírez (2012) realiza un análisis de las habilidades de visualización que estos alumnos manifiestan durante tres sesiones de enriquecimiento curricular. De este trabajo destacamos el marco teórico para determinar los elementos que componen la visualización en un entorno geométrico y el procedimiento utilizado para categorizar y registrar la manifestación de las habilidades.

En resumen, las investigaciones revisadas muestran el interés actual sobre la visualización, la importancia de emplear TIC en la enseñanza de la geometría, en general, y la visualización en particular, y enfatiza la importancia de la formación del profesor sobre su actuación en clase de geometría.

Capítulo 2. **Objetivos y preguntas de investigación**

Este apartado está dedicado a describir los objetivos y preguntas que serán nuestros fines investigativos. Para ello comenzamos por indicar los objetivos y las preguntas de investigación que guiarán el diseño. Los objetivos y preguntas son imprescindibles para definir y orientar nuestra investigación. Partiremos de un objetivo general que intentaremos alcanzar a través de unos objetivos específicos. Para ello nos haremos una serie de preguntas que nos ayudarán a indagar para cubrir todos los objetivos, además ser la razón que nos guiará en la indagación del campo de estudio que hemos seleccionado.

2.1 Objetivo general.

Nuestro objetivo principal es *describir* las habilidades visuales que manifiestan los futuros docentes de educación primaria al enfrentarse a la tarea de detección de regularidades geométricas de un tejido. Para este fin nos ayudaremos de los siguientes objetivos específicos.

2.2 Objetivos específicos

Los objetivos específicos estructuran la investigación, orientando el diseño y nos ayudan a alcanzar el objetivo general, ya que son pequeños propósitos que darán sentido a nuestro trabajo. Los objetivos específicos que hemos seleccionado son:

- O1 Examinar qué habilidades visuales son necesarias para resolver una actividad geométrica: examinar las regularidades geométricas de un tejido.
- O2 Identificar que habilidades ponen de manifiesto los alumnos de magisterio al resolver esta actividad.
- O3 Relacionar las actividades planteadas con las habilidades visuales manifestadas por los estudiantes.

2.3 Preguntas

a) ¿Qué habilidades de visualización son necesarias para afrontar las actividades propuestas?

b) ¿Cuáles de estas habilidades se manifiestan en la resolución que hacen los estudiantes de la actividad planteada?
c) ¿Cuál o cuáles son las habilidades de visualización que se manifiesten en más ocasiones? ¿Cuál o cuáles son las que se manifiestan en menos ocasiones o con mayor dificultad?
d) ¿Qué tipo de actividad será las que mas contribuya a la manifestación de las habilidades de visualización?

Capítulo 3. **Marco metodológico**

En este capítulo definiremos el marco metodológico, caracterizando el tipo de investigación desarrollada, así como la descripción de los elementos que la componen: contexto, sujetos, variables e instrumento de recogida de información. Para terminar el capítulo describiremos el procesos de investigación en el que hemos incluido una caracterización necesaria para el análisis de contenido de las habilidades por un lado y de las respuestas de alumnado por otro.

3.1 Tipo de investigación

Siguiendo los criterios para tipificar las distintas variables de investigación (Gutiérrez, 1997), nuestro trabajo es una investigación aplicada, de naturaleza descriptiva, ya que analizamos un suceso (respuestas de alumnos). Según la dimensión temporal es un estudio transversal realizado en un momento determinado. El análisis de los datos se ha realizado de manera cualitativa, aunque necesitamos un análisis para la codificación y valoración de las repuestas escritas de los alumnos, que realizaremos a través del análisis de contenido. Si hablamos de los participantes del estudio nuestra muestra ha sido intencional y por disponibilidad.

3.2 Elementos de la investigación

Para poder seguir con el diseño de la investigación pasaremos a definir los elementos característicos de nuestro trabajo. Comenzaremos describiendo el contexto en el que se sitúa, para pasar a describir los sujetos que han participado y las variables que hemos estudiado.

3.2.1 Contexto

El estudio tiene lugar en una práctica de la asignatura Bases Matemáticas para la educación Primaria de primer curso en el Grado de Maestro de Primaria en la Universidad de Granada. Los alumnos previamente han realizado una práctica individual (anexo1) en la que han trabajado los contenidos que posteriormente le serán de utilidad para la práctica de grupo (anexo 2), consistente en la elaboración de un informe en el que recojan el estudio sobre la teselación de la Pata de Gallo. Este informe se realiza en horas no lectivas en las que el alumnado dispone de toda la bibliografía y medios necesarios para poder resolverla.

3.2.2 Sujetos

Los sujetos que componen nuestra muestra son alumnos de la Universidad de Granada del primer Grado en Educación Primaria, de la asignatura, Bases Matemáticas para la educación Primaria. Dichos estudiantes se encontraban agrupados en 13 grupos, la mayoría de cuatro componentes. Los sujetos de nuestra investigación son los grupos, por lo que la muestra se compone de 13 unidades. Se trata de una muestra intencional, aprovechando la disposición de la información derivada de los trabajos de estos grupos.

3.2.3 Variables

Nos interesa estudiar las habilidades de visualización puestas en juego por los grupos, por lo que la variable de estudio son las habilidades. De las siete habilidades de visualización propuestas por Del Grande (1990), hemos seleccionados tres porque son las que en mayor medida tienen que ponerse de manifiesto en las tareas realizadas. Aunque sería muy interesante analizar la totalidad de las habilidades de visualización, hemos apreciado que las actividades no hacen fácil realizar tal análisis. No pretendemos decir que en alguna ocasión no manifiesten tales habilidades, pero el bajo uso requerido en las actividades, así como lo poco que se pueden apreciar en los datos examinados (los informes finales de la práctica), nos hacen decir que no tienen relevancia en el estudio.

Las habilidades de visualización seleccionadas en el estudio por su relevancia, tienen que ver con: dibujar, analizar y caracterizar figuras geométricas, siempre en el plano. Estas habilidades son: Coordinación ojo-motor, Percepción figura-contexto y Percepción de las relaciones Espaciales.

Para estudiar cuándo se manifiestan las habilidades hemos completado el estudio que hicimos de la teselación (ver punto 1.3), resolviendo concretamente las actividades planteadas. Hemos de reconocer que el trabajo propuesto, elaborar un informe final de la práctica realizada, da a los estudiantes la posibilidad de responder de distintas formas, pese a que se le indiquen algunos puntos que deben tratar.

3.2.4 Instrumento de recogida de información

La información se ha recogido de los informes finales de la práctica que realizaron los diferentes grupos de alumnos, para la asignatura Bases Matemáticas para la educación Primaria (anexo 3).

3.3 Proceso de investigación

Una vez definido y caracterizado el tipo de investigación, así como los elementos de la investigación, pasaremos a describir el proceso de investigación, en el que hemos realizado una caracterización tanto de las variables por habilidades de visualización como de las respuestas de los alumnos por las destrezas manifestadas de los alumnos.

3.3.1 Caracterización

Para poder caracterizar las habilidades hemos realizado un proceso de triangulación, que ha supuesto un proceso laborioso cognitivamente, pero a la vez más enriquecedor. A través de la triangulación pudimos pulir la selección de variables a analizar para cada actividad, además de caracterizar las respuestas de los alumnos para cada actividad.

Hemos analizado estas variables a través de las correspondientes habilidades de visualización, realizando la tabla 1 en la que se puede comprobar que es lo que se analiza en cada una de las actividades. Para poder examinar las habilidades de visualización puestas en juego, hemos establecido una correspondencia entre las habilidades y destrezas asociadas a la resolución de la tarea propuesta:

a) Coordinación ojo-motor: en la que se analizado si dibujaban lo que se pedía en cada una de las actividades que se pedía que hiciesen algún dibujo.
b) Figura-contexto: en la que se analizado si describían e identificaban las figura que se le pedía y los elementos pertinentes en cada actividad.
c) Relaciones espaciales: en la que se ha analizado la caracterización e identificación de cada uno de los elementos necesarios en el movimiento o transformación de las figuras.

Esta caracterización se muestra en la tabla 1. En la actividad B la habilidad Coordinación ojo-motor y la habilidad Percepción de las Relaciones Espaciales no son relevantes para resolverla, ya que se le piden explícitamente destrezas propias de la habilidad Percepción de la Figura Contexto. Del mismo modo ocurre en la actividad C, ya que no es necesaria la habilidad Coordinación ojo-motor.

Tabla 1. *Caracterización de las habilidades por actividad.*

Actividad	Habilidades		
	Ojo-Motor	Figura-Contexto	Relaciones Espaciales
Dibujar una tesela de esta teselación e indicar qué tipo de polígono es.	Dibuja la figura mínima	Identifica la figura mínima para obtener la teselación respetando sus proporciones	Caracteriza el polígono describiendo sus características (lados, ángulos, vértices, líneas auxiliares, nombre)
Señalar qué movimientos hay que aplicar a la tesela para obtener la teselación completa, identificando los elementos de estos movimientos..	No relevante	Identifica los movimientos y elementos necesarios para construir la teselación (eje, vector, reflexión, traslaciones)	No relevante
Dibujar una baldosa con la que formar la pata de gallo sólo mediante traslaciones.	Dibuja la baldosa que permite obtenerla con traslaciones	Identifica una baldosa que permite obtener la teselación solo con traslaciones (cuadrado)	Comprueba como se forma la teselación son con traslaciones a partir de la baldosa dibujada(palabras o dibujo)
Relacionar la teselación de la pata de gallo con las teselaciones regulares, indicando qué polígono regular permite obtenerla	No relevante	Identifica la teselación con otras teselaciones regulares (cuadrada)	Identifica las deformaciones que hay que realizar a un cuadrado para obtener la tesela
Dibujar una baldosa con la forma de un polígono regular que permita obtener la teselación de la pata de gallo.	Dibuja una baldosa con la forma de un polígono regular	Identifica la baldosa con la forma de un polígono regular para obtener la pata de gallo (líneas o blanco y negro)	Caracteriza los elementos de la baldosa para construir la teselación (vector, traslación)
Mostrar todo ello sobre un dibujo de la teselación de la Pata de gallo	Dibuja la teselación (en línea o en B y N, manteniendo ángulos y proporción.	Identifica la teselación completa (en línea o en blanco y negro) correctamente, manteniendo ángulos y medidas de segmentos.	Identifica los movimientos que dejan invariante la teselación.(en ocasiones puede identificarlos en otras actividades)

Capítulo 4. **Análisis de datos y resultados**

En este capítulo se presenta un informe con los resultados que hemos obtenido en el proceso de investigación, después de haber caracterizado las respuestas de los alumnos. Para ello hemos elaborado una tabla de codificación que mostramos en el apartado correspondiente.

4.1 Codificación de respuestas

Para la codificación de las respuestas hemos realizado una plantilla (tabla 2, 3, 4, 5, 6 y 7) en la que se han caracterizado la manifestaciones de cada grupo para comprobar si se manifestaba la habilidad requerida en cada una de las actividades y se han aplicado los criterios de corrección. Una vez caracterizado las repuestas se ha procedido a la cuantificación de las respuestas (tabla 9) de los alumnos para cada una de las actividades. Estas manifestaciones se han valorado con 0, 1 y 2.

0 = cuando no manifiesta la habilidad (pese a pedirla explícitamente).

1 = cuando manifiesta la habilidad pero incompleta.

2 = cuando manifiesta la habilidad completa.

En esta valoración no se ha tenido en cuenta el rendimiento, sólo si se manifiestan las habilidades visuales pertinentes para cada actividad. Consideramos que una destreza se ha manifestado de manera completa cuando el alumno la manifiesta correctamente. En caso de cometer errores al utilizarla o no hacerlo de una manera completa, se considera un uso incompleto de dicha habilidad.

En algunas ocasiones la habilidad no se manifestaba en la actividad requerida, pero sí en otra. En este caso se ha valorado por correcta y señalizado con un asterisco.

En la tabla 8 se han separado por habilidad, cuantificando las respuestas para comprobar la frecuencia con la que cada grupo ponen de manifiesto la habilidad tanto de manera completa (2) o incompleta (1). Por ejemplo, el grupo 1 en la actividad A ha manifestado de manera completa las tres habilidades.

En la tabla 9 se ha sumado la cantidad total de manifestaciones incompletas (número de unos) y las completas (números de doses), para poder cuantificar las veces que ponen de manifiesto dichas habilidades. Por ejemplo, el grupo 1 ha manifestado de manera incompleta la habilidad de Percepción de las relaciones espaciales en una única ocasión y en cambio lo ha hecho de manera completa en 3 ocasiones. En esta tabla también se ha registrado el uso global de la manifestación al sumar todas las manifestaciones tanto de manera incompleta como correcta. Por ejemplo, del grupo 1 se ha registrado una única manifestación de manera incompleta y 9 de manera correcta (han obtenido un 1 y 9 doses). A partir de estos datos, podemos valorar el uso global de la visualización diciendo que han manifestado las habilidades en 10 ocasiones. También en esta tabla se ha obtenido la proporción de habilidades manifestadas completas respecto al uso total de la habilidad en tanto por ciento. Por ejemplo, el grupo 1 ha manifestado las habilidades de manera completa en el 90 por ciento de las ocasiones de las que se han registrado.

Para facilitar el análisis, se han coloreado en azul las puntuaciones más favorables para el uso correcto de la visualización (valores más altos en manifestaciones completas, más bajos en incompletas) y en rojo las menos favorables (más altos en manifestaciones incompletas y más bajos en completas). También se han coloreado en azul la mayor manifestación total de habilidades y porcentaje de corrección (análogamente en rojo para las menores).

Finalmente se han registrado algunas Observaciones para cada grupo donde se señalaban aspectos interesantes relativos al análisis y se ha creado la tabla 10 para analizar las habilidades completas e incompletas para cada actividad. Por ejemplo, para la habilidad Coordinación Ojo-Motor, ha destacado que no ha habido ninguna manifestación incompleta en la actividad C y 12 manifestaciones completas en la F. En cambio, en la actividad E se han producido los valores más altos de manifestaciones incompletas (4) y el más bajo de completas (6).

Tabla 2. *Actividad a) Dibujar una tesela de esta teselación e indicar que tipo de polígono es*

	Habilidades para esta actividad		
Grupo	Coordinación Ojo-motor	Percepción Figura-contexto	Percepción de la relaciones espaciales
1	2. Dibuja la tesela correcta y hace referencia al blanco y negro	2. Identifica líneas auxiliares	2. Describe lados, ángulos, vértices y colores
2	1. Dibuja una tesela alargada no respetando la proporción	1. identifica la tesela pero NO respecta las proporciones	2. Describe lados, ángulos, vértices y fig. geométricas
3	2. Dibuja la tesela correcta.	2. Identifica la tesela	2. Describe lados y ángulos.
4	0. No dibuja pero si completa más adelante la teselación correcta.	0. No identifica la tesela pero si dibuja la final	0. NO habla de las figuras y sus características.
5	2. Dibuja la tesela	2. Identifica la tesela mínima.	0. No dice nada de las características del polígono.
6	1. Dibuja la tesela (en otra actividad) pero cree que la tesela es un cuadrado.	1. Identifica la tesela (en otra actividad) pero cree que la tesela es un cuadrado.	1. Caracteriza el polígono pero solo habla de lados y en otra actividad
7	2. Dibuja la tesela como un paralelogramo (mayor grado de visualización	2. Identifica la tesela (como un paralelogramo (mayor grado de visualización)	1. No habla de características del polígono aunque si de otro polígonos interiores.
8	2. Dibuja bien la tesela	2. Identifica la figura mínima	1. Identifica lados pero no ángulos ni vértices.
9	2. Dibuja bien la tesela	2. Identifica la figura mínima	1. Identifica lados pero no ángulos ni vértices.
10	2. Dibuja bien la tesela	2. Identifica la figura mínima	2.Caracteriza el polígono por sus lado
11	2. Dibuja bien la tesela	2. dibuja bien la tesela	0. No habla de características del polígono.
12	2[i]. La dibuja bien en la siguiente actividad	2[4]. La identifican la siguiente actividad	2. Describe lados, ángulos, vértices y colores
13	2. Dibuja bien la tesela	2. Identifica la figura mínima	2. Describe lados y tipo de polígono por sus ángulos.

Tabla 3. *Actividad B) Señalar qué movimientos hay que aplicar a la tesela para obtener la teselación completa, identificando los elementos de estos movimientos (dónde está el eje, caso de reflexiones, el centro y ángulo en caso de rotación y el vector, en las traslaciones).*

Grupo	Percepción de la relaciones espaciales
1	2. Identifica los movimiento y elementos necesarios para obtener la teselación (vectores y traslación)
2	1. Sólo identifica los movimientos pero no sus elementos (vector, eje..)
3	2. Identifica los movimiento y elementos necesarios para obtener la teselación (vectores y traslación)
4	1. Sólo identifica traslaciones verticales que no completarían la teselación
5	2. Identifica los movimiento y elementos necesarios para obtener la teselación (vector, simetría, traslación)
6	2. Identifica los movimiento y elementos necesarios para obtener la teselación (vectores y traslación
7	2. Identifica los movimiento y elementos necesarios para obtener la teselación (vectores y traslación)
8	1. Sólo identifica los movimientos pero no sus elementos (vector, eje..)
9	2. Identifica los movimiento y elementos necesarios para obtener la teselación (vectores y traslación)
10	2. Identifica los movimiento y elementos necesarios para obtener la teselación (vector, simetría, traslación)
11	1. Sólo identifica traslaciones horizontales que no completaría la teselación
12	2. Identifica los movimiento y elementos necesarios para obtener la teselación (vector, simetría, traslación)
13	1. solo identifica traslaciones horizontales que no completaría la teselación

Tabla 4. *Actividad c)Dibujar una baldosa con la que formar la pata de gallo sólo mediante traslaciones*

Grupo	Coordinación Ojo-motor	Percepción Figura-contexto	Percepción de la relaciones espaciales
1	2. Dibuja la baldosa correcta	2. Identifica la baldosa que genera la teselación solo con traslaciones	1. Comprueba la formación de la tesela mediante un dibujo, pero solo horizontalmente.
2	2. Dibuja la baldosa correcta	2. Identifica la baldosa que genera la teselación solo con traslaciones	2. Comprueba la formación de la tesela mediante un dibujo.
3	2. Dibuja la baldosa correcta (con colores)	2. Identifica la baldosa que genera la teselación solo con traslaciones	0. NO comprueba la formación de la teselación.
4	2. Dibuja la baldosa correcta (con colores)	2. Identifica la baldosa que genera la teselación solo con traslaciones	0. NO comprueba la formación de la teselación.
5	2. Dibuja la baldosa correcta	2. Identifica la baldosa que genera la teselación solo con traslaciones	2. Comprueba la formación de la tesela mediante un dibujo.
6	2. Dibuja la baldosa correcta	2. Identifica la baldosa que genera la teselación solo con traslaciones	2. Comprueba la formación de la tesela mediante un dibujo.(en otra actividad)
7	2. Dibuja la baldosa correcta	2. identifica la baldosa que genera la teselación solo con traslaciones	2. Comprueba la formación de la tesela mediante un dibujo.
8	2. Dibuja la baldosa correcta	2. Identifica la baldosa que genera la teselación solo con traslaciones	2. No Comprueba la formación de la tesela pero si indica los movimiento necesarios.
9	0. No dibuja lo pedido (dibuja una gran baldosa con mucha teselas)	0. Identifica una gran baldosa con muchas teselas	0. NO comprueba la formación de la teselación.
10	2[ii]. Dibuja la baldosa correcta (con colores)	2. Identifica la baldosa que genera la teselación solo con traslaciones	2. NO comprueba la formación de la teselación, pero si lo indica en otra actividad.
11	2. Dibuja la baldosa correcta	2. Identifica la baldosa que genera la teselación solo con traslaciones	0. NO comprueba la formación de la teselación.
12	0. No dibuja lo pedido (dibuja una gran baldosa con mucha teselas)	0. Identifica una gran baldosa con muchas teselas	0. NO comprueba la formación de la teselación.
13	2. Dibuja la baldosa correcta (con colores)	2. Identifica la baldosa que genera la teselación solo con traslaciones	0. NO comprueba la formación de la teselación.

Tabla 5. *Actividad d). Relacionar la teselación de la pata de gallo con las teselaciones regulares, indicando qué polígono regular permite obtener la "pata de gallo" y la forma en que hay que cambiar ese polígono regular para formar la tesela.*

Grupo	Percepción Figura-contexto	Percepción de la relaciones espaciales
1	0. No identifica con otras teselaciones, pero si identifica un cuadrado incorrecto.	0. Identifica la formación a través de la deformación.
2	0. No identifica con otras teselaciones, pero si identifica un triangulo en algunas ocasiones erróneo.	0. Identifica la formación a través de unir triángulos que lleva a la formación correcta.
3	0. No identifica ni relaciona con otras teselaciones regulares.	0. NO referencias a la formación de la tesela a través de la deformación, lo hace a través de varios polígonos.
4	1. No identifica ni relaciona con otras teselaciones regulares, aunque señala el cuadrado	2. Hace referencias a la formación de la tesela (quitar una parte poner arriba)
5	2. Identifica y relaciona con otras teselaciones regulares.	2. Hace referencias a la formación de la tesela (quitar una parte poner arriba)
6	1. No identifica ni relaciona con otras teselaciones regulares, aunque señala el cuadrado	0. NO referencias a la formación de la tesela a través de la deformación
7	1. No identifica con otras teselaciones, pero si identifica un triangulo en algunas ocasiones erróneo.	2. Identifica la formación a través de unir triángulos.
8	1. No identifica ni relaciona con otras teselaciones regulares, aunque señala el cuadrado	0. NO referencias a la formación de la tesela a través de la deformación
9	2. Identifica y relaciona con otras teselaciones regulares	2. Hace referencias a la formación de la tesela (dividiendo en cuadros por la diagonal)
10	1. No identifica ni relaciona con otras teselaciones regulares, aunque señala el cuadrado	0. NO referencias a la formación de la tesela a través de la deformación
11	2. Identifica y relaciona con otras teselaciones regulares.	2. Hace referencias a la formación de la tesela (quitar una parte poner arriba)
12	1. No identifica ni relaciona con otras teselaciones regulares, aunque señala el cuadrado	2. Hace referencias a la formación de la tesela (quitar una parte poner arriba)
13	2. Identifica y relaciona con otras teselaciones regulares.	0. NO referencias a la formación de la tesela a través de la deformación.

Tabla 6. *Actividad e) Dibujar una baldosa con la forma de un polígono regular que permita obtener la teselación de la pata de gallo.*

Grupos	Coordinación Ojo-motor	Percepción Figura-contexto	Percepción de la relaciones espaciales
1	0. La dibujo mal	0. No logra identificar la baldosa regular	0. No hace ninguna caracterización de los elementos de la baldosa
2	2. Dibuja la baldosa aunque habría que inclinarla para obtener la teselación	2. Identifica la baldosa aunque habría que inclinarla para obtener la teselación	0. No hace ninguna caracterización de los elementos de la baldosa
3	2. Dibuja la baldosa en un cuadrado ya inclinada. (pero en la actividad c)	2. Identifica la baldosa inclinada (pero en la actividad c)	0. No hace ninguna caracterización de los elementos de la baldosa
4	2. Dibuja la baldosa en un cuadrado ya inclinada.	2. Identifica la baldosa inclinada	0. Caracteriza los elementos de la baldosa pero errónea
5	2. Dibuja la baldosa en un cuadrado ya inclinada. (pero en la actividad d)	2. Identifica la baldosa inclinada (pero en la actividad d)	2. Caracteriza los elementos de la baldosa cuadrada
6	2. Dibuja la baldosa en un cuadrado ya inclinada.	2. Identifica la baldosa inclinada (pero en la actividad c)	2. Caracteriza los elementos de la baldosa cuadrada (en la actividad b)
7	1. Dibuja una baldosa con varias figuras (pero si en la actividad e)	1. identifica una baldosa con varias figuras, (pero si en la actividad e)	1. Habla de elementos de la baldosa pero no la dibuja bien.
8	1. Dibuja una baldosa con varias figuras (pero si en la actividad c)	1. identifica una baldosa con varias figuras, (pero si en la actividad c)	1. Habla de elementos de la baldosa pero no la dibuja bien. (pero si en la actividad c)
9	0. Lo dibuja mal	0. identifica una baldosa con varias figuras	1. Habla de elementos de la baldosa pero no le ayuda a identificarla.
10	1. La dibuja mal, pero bien en la actividad d)	1. No identifica la baldose en esta actividad pero si en la actividad d)	1. No habla de elementos de la baldosa
11	0. La dibuja mal	1. Identifica una baldosa errónea (pero si lo hace bien en la actividad d)	2. Habla de las características de la baldosa en la actividad f)
12	2. La dibuja bien	2. Identifica la baldosa regular.	2. Identifica elementos de la baldosa
13	1. Lo dibuja mal en esta actividad pero no en la d)	1. Identifica una baldosa no regular, pero si lo hace bien en la actividad d)	1. Habla de elementos de la baldosa validos para una tesela no regular.

Tabla 7. *Actividad f) Mostrar todo ello sobre un dibujo de la teselación de la Pata de gallo.*

	Coordinación Ojo-motor	Percepción Figura-contexto	Percepción de la relaciones espaciales
1	2. dibuja la teselación correcta	2. Identifica la teselación	2. Identifica los movimientos que la dejan invariante. En otra actividad
2	1. La dibuja mal, pero bien en la actividad c)	1. La identifica mal, pero bien en la actividad c)	2. Identifica los movimientos que la dejan invariante. En la actividad b)
3	2. Dibuja la teselación correcta en la actividad e)	2. Identifica la teselación en la Actividad e)	2. Identifica los movimientos que la dejan invariante. En la actividad a)
4	2. Dibuja la teselación correcta	2. Identifica la teselación	2. Identifica los movimientos que la dejan invariante. En la actividad a)
5	2. Dibuja la teselación correcta en blanco y negro en la actividad C)	2. Identifica la teselación en líneas y en blanco y negro[iii]	2. Identifica los movimientos que la dejan invariante.
6	2. Dibuja la teselación correcta en líneas y en blanco y negro	2. Identifica la teselación en líneas y en blanco y negro[iv]	2. Identifica los movimientos que la dejan invariante.
7	2. Dibuja la teselación correcta	2. Identifica la teselación	2. Identifica los movimientos que la dejan invariante.
8	2. La dibuja bien en la actividad e)	2. La identifica en la actividad e)	2. Identifica los movimientos que la dejan invariante
9	2. Dibuja la teselación correcta en blanco y negro	2. Identifica la teselación en blanco y negro	1. no Identifica los movimientos que la dejan invariante, pero si construye la teselación
10	2. Dibuja la teselación en la actividad c)	2. Identifica la teselación en la actividad c)	0. No identifica los movimientos que la dejan invariante.
11	2. Dibuja la teselación correcta	2. Identifica la teselación	2. Identifica los movimientos que la dejan invariante.
12	2. Dibuja la teselación correcta	2. Identifica la teselación en blanco y negro	2. Identifica los movimientos que la dejan invariante.
13	2. Dibuja la teselación correcta en blanco y negro	2. Identifica la teselación en blanco y negro	2. Identifica los movimientos que la dejan invariante.

Tabla 8. *Identificación de Habilidades en las respuestas de los alumnos*

	Actividades / habilidades															total
	A			B	C			D		E			F			
Grupo	OM	FC	RE	RE	OM	FC	RE	FC	RE	OM	FC	RE	OM	FC	RE	
1	2	2	2	2	2	2	1	0	0	0	0	0	2	2	2	10
2	1	1	2	1	2	2	2	0	0	2	2	0	1	1	2	12
3	2	2	2	2	2	2	0	0	0	2	2	0	2	2	2	11
4	0	0	0	1	2	2	0	1	2	2	2	0	2	2	2	10
5	2	2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	14
6	1	1	1	2	2	2	2	1	0	2	2	2	2	2	2	14
7	2	2	1	2	2	2	2	1	2	1	1	1	2	2	2	15
8	2	2	1	1	2	2	2	1	0	1	1	1	2	2	2	14
9	2	2	1	2	0	0	0	2	2	0	0	1	2	2	1	10
10	2	2	2	2	2	2	2	1	0	1	1	1	2	2	0	13
11	2	2	1	1	2	2	0	2	2	0	1	2	2	2	2	13
12	2	2	2	2	0	0	0	1	2	2	2	2	2	2	2	12
13	2	2	1	1	2	2	0	2	0	1	1	1	2	2	2	13

Tabla 9. *Suma de las manifestaciones por habilidades.*

	Habilidades.													
	OM			FC			RE			Total				Observaciones
Grupo	1	2		1	2		1	2		1	2	∑	%	
1	0	3		0	3		1	3		1	9	10	90	
2	2	2		2	2		1	3		5	7	12	58	Diferentes. Respuesta de proporción entre actividades
3	0	4		0	4		0	3		0	11	11	100	
4	0	3		1	3		1	2		2	8	10	80	Dibuja un baldosa triangular
5	0	4		0	5		0	5		0	14	14	100	
6	1	3		2	3		1	4		4	10	14	71	No dibuja la figura mínima
7	1	3		2	3		2	4		5	10	15	67	Paralelogramo fig. mínima,
8	1	3		2	3		3	2		6	8	14	57	No entiende el concepto de baldosa en una teselación
9	0	2		0	3		3	2		3	7	10	70	Descripción de polígono precisa, baldosa triangular
10	1	3		2	3		1	3		4	9	13	69	
11	0	3		1	4		2	3		3	10	13	77	
12	0	3		1	3		0	5		1	11	12	92	No entiende el concepto de baldosa en una teselación
13	1	3		1	4		3	1		5	8	13	62	Dibujar una baldosa triangular
total	7	39		14	43		18	20		39	122	161	76	
		%	85		%	75		%	53					

Tabla 10. *Habilidades completas e incompletas para cada variable (habilidad de visualización).*

Coordinación ojo-motor					Percepción figura-contexto					Percepción de las relaciones espaciales			
Actividad	ceros	unos	doses		Actividad	ceros	unos	doses		Actividad	ceros	unos	doses
A	1	2	10		A	1	2	10		A	2	6	5
B	no relevante				B	no relevante				B	0	5	8
C	2	0	11		C	2	0	11		C	6	1	6
D	no relevante				D	3	6	4		D	7	0	6
E	3	4	6		E	2	5	6		E	4	5	4
F	0	1	12		F	0	1	12		F	1	1	11

4.2 Apreciaciones de los resultados.

De los resultados obtenidos, de un modo global, podemos afirmar que los alumnos han manifestado las habilidades visuales en las tareas realizadas. La mayoría de los grupos lo han hecho además correctamente. Pero para aportar unos resultados mas específicos analizaremos los resultados según habilidades concretas, indicadores globales y tareas.

4.2.1 Según habilidades concretas

En este apartado se responderá a las apreciaciones relacionadas con las habilidades que han manifestado cada grupo, para el que se ha elaborado la tabla 11 en la que se recogen el grupo que más y que menos ha manifestado cada variable tanto en el caso de las completas como en el de la incompletas.

Tabla 11. *Grupos destacados en la manifestación de habilidades completas e incompletas.*

	+ ocasiones		- ocasiones	
habilidad	grupo	nº veces	grupo	nº veces
Coordinación OM uso incompleto	2	2	1,3,4,5,9,11	0
Coordinación OM uso completo	3,5	4	2,9	2
Percepción FC uso incompleto	2,6,7,8	2	3,5,9	0
Percepción FC uso completo	5	5	2	2
Percepción de la RE uso incompleto	8,9,13	3	3,5,12	0
Percepción de la RE uso completo	5	5	13	1

De esta comparación resaltamos que los grupos 3 y 5 han destacado por el uso completo de las habilidades. En cambio, el grupo 8 lo ha hecho por su uso incompleto, debido principalmente a que comete errores al no identificar ángulos, vértices y elementos de los movimientos, no relacionar con otras teselaciones ni hacer referencias a la formación de la teselación y no dibujar correctamente.

Según los indicadores globales (tabla 9), se puede apreciar como los grupos han manifestado gran cantidad de habilidades, lo que puede indicar la presencia de las habilidades visuales que hemos estudiado, aunque hay diferencia entre grupos y varias apreciaciones.

Hay grupos que han utilizados menos habilidades visuales pero lo han hecho correctamente (grupo 3, once de once) y otros grupos que han manifestado más habilidades pero muchas de ellas incompletas (grupo 7, cinco de quince y grupo 8, seis de catorce). También destacamos los que han manifestado más habilidades y lo han hecho de manera correcta (grupo 5, catorce de catorce). Con estos datos se puede apreciar los grupos que tienen mejor desarrollada las habilidades visuales han sido los grupos 3 y 5.

De las habilidades manifestadas de manera incompleta, destacamos los grupos 2 y 8, ya que no han respetado las proporciones de alguna actividad (grupo 2) y por no han definido los conceptos geométricos (grupo 8, definiciones incompletas e incorrectas).

En cuanto a las tres habilidades las que hemos analizado, hay grupos que han manifestado mejor la habilidad Coordinación ojo-motor (3 y 5), otros la habilidad Percepción figura-contexto (grupo 5) y otros la habilidad Percepción de la relaciones espaciales (grupo 5 y 12). Como podemos comprobar el grupo 5 es que mejor ha manifestado todas las habilidades visuales. Se puede apreciar como los grupos 2, 8 y 13 son los que han manifestado en más ocasiones las habilidades de manera incompleta.

Es destacable que ha sido la habilidad Coordinación Ojo-Motor en la que se ha obtenido un porcentaje mayor en la corrección al utilizarla (en el 85 por ciento de las ocasiones en las que se ha manifestado, los estudiantes lo han hecho de manera completa). las situaciones que han dado el uso incompleta se debido a un dibujo que no respeta las proporciones (grupo 1) o a un dibujo que ha confundido la baldosa con el polígono que forma la tesela (grupo 6). Los mismos grupos han manifestado la habilidad Percepción figura-contexto de manera incompleta por los mismos motivos.

En cambio la habilidad Percepción de las Relaciones Espaciales ha sido la que se ha manifestado de manera correcta en el menor porcentaje (53 %). El uso de manera incompleta se ha debido a una caracterización y descripción incompleta del polígono que forma la tesela (grupo 3,5,9).

4.2.2 Según uso global

Si observamos las manifestaciones globales en la tabla 9, las tres habilidades se han manifestado más de un modo completo que incompleto. La habilidad de la que más manifestaciones completas se ha registrado ha sido la Percepción de la Figura-Contexto (43 manifestaciones) y de la que menos ha sido la Percepción de las Relaciones Espaciales (20). Respecto al uso incompleto, ha sido la habilidad Percepción de las Relaciones Espaciales la que más manifestaciones ha registrado (18) y la que menos ha sido la Coordinación Ojo-Motor (7).

Destacamos que se han registrado 161 manifestaciones correctas del uso de las habilidades, frente a las 122 incompletas. En todos los grupos, globalmente, las manifestaciones completas han sido superiores a las incompletas. Resaltamos que hay dos grupos que han manifestado correctamente las tres habilidades de visualización analizadas, obteniendo por tanto un cien por cien en el porcentaje de corrección. El grupo que menor porcentaje ha obtenido en este sentido ha sido el grupo 8 que lo ha hecho en un 57 %. Ya que han dibujado mal la figuras, han confundido conceptos a la hora de realizar la tarea o han realizado definición o caracterizaciones incompletas.

4.2.3 Según las tareas

En este apartado analizamos las habilidades según las tareas para cada actividad (tabla10). Respecto a la habilidad Coordinación ojo-motor, la actividad C es en la que menos manifestaciones incompletas se han manifestado ya que no se han cometido errores. La actividad E es la que más manifestaciones incompletas tiene ya que los estudiantes dibujan mal la baldosa. Además también ha sido la que tiene menos manifestaciones correctas. La actividad F es la que más ha favorecido el uso correcto de la habilidad, ya que ha sido una recopilación de todas las actividades anteriores y se ven reflejadas en unas u otras actividades.

En cuanto a la habilidad Percepción de la figura-contexto, en la actividad C no se han cometido manifestaciones incompletas y ha sido la actividad F la que más ha favorecido el uso correcto de esta habilidad al identificar la teselación. Destacamos que en la actividad D es donde se han manifestado más habilidades de un modo incompleto y menos de un modo completo. Esto ha sido debido a que los estudiantes no han identificado ni relacionado con otras teselaciones.

Para la habilidad Percepción de las relaciones espaciales, destaca el uso incompleto que los estudiantes han manifestado en la actividad A, al no caracterizar correctamente el polígono e identificar sus elementos. También destaca el comportamiento de los estudiantes en la actividad D, ya que, pese a no haber manifestaciones incompletas, aparece un número elevado de registros en los que no se manifiesta. De la actividad F, destaca que casi todos los grupos (11) han manifestado correctamente esta habilidad al identificar los movimientos que dejan invariante la teselación.

Capítulo 5. **Conclusiones.**

Nuestra investigación ha pretendido describir las habilidades visuales que ponen de manifiesto los futuros docentes de Educación Primaria en la resolución de tareas geométricas. El estudio de las habilidades visuales que los alumnos manifiestan nos ha llevado a analizar profundamente la relación entre las respuestas del alumnado y estas habilidades. Se han podido alcanzar los objetivos planteados a través de los distintos análisis realizados, además de responder a las preguntas planteadas.

Se han comprobado las habilidades visuales que eran necesarias para la resolución de las tareas que se le plantaron en la práctica de enseñanza. Se ha realizado un análisis de contenido que nos llevó a la selección de las habilidades Coordinación ojo-motor, Percepción figura-contexto y Percepción de las relaciones espaciales. A través de esta selección se han podido comprobar las habilidades manifestadas.

El análisis de las habilidades manifestadas por el alumnado respondió al segundo objetivo, caracterizando cada una de las respuestas de los alumnos logrando una visión unificada del tipo de respuestas, de las que hemos extraído que la Percepción de las relaciones espaciales ha llevado al alumnado a un mayor conflicto en la resolución. Las manifestaciones incompletas se produjeron principalmente por aspecto formales más que por aspectos visuales, ya que lograban identificar la figura, pero no describirla.

En las actividades analizadas se ha comprobado la relación existente con las habilidades y cómo debían manifestarse. Los resultados muestran que la habilidad que más han manifestado correctamente ha sido la Percepción de la Figura-contexto, haciéndolo correctamente en más del 75% de las ocasiones. Hemos obtenido una descripción de los grupos según sus habilidades que nos ha ayudado en la clasificación de los mismos, comprobando que los grupos que eran más visuales en unas actividades también lo eran en las demás.

Respecto al sentido espacial, la idea desarrollada en la tesis de Ramírez (2012) ha manifestado que la actividad propuesta para nuestro estudio nos hacer ver lo importante que es la coordinación entre varios habilidades y procesos para afrontar las tareas. Hemos observado que mayoritariamente los grupos que manifestaban una habilidad correcta dentro de una actividad se comportaban del mismo modo con las demás habilidades necesarias para su resolución.

El análisis de los resultados nos ha dado respuesta a las preguntas. De las habilidades estudiadas, la que más han manifestado ha sido la Percepción figura-contexto, y la que menos, la Percepción de las relaciones espaciales. La actividad que más ha contribuido a la manifestación de habilidades ha sido la actividad F. Obtenido unos resultados que informan de cada uno de los componentes de nuestro trabajo.

Respecto a las limitaciones, reconocemos que el trabajo propuesto tiene carencias en al análisis de los datos que se podrían cubrir con grabaciones y entrevistas, además de una construcción de la prueba en el que se puedan analizar todas las habilidades propuestas por Del Grande (1990). Tampoco era nuestra intención para este trabajo de fin de master, ya que nuestra intención ha sido realizar un estudio exploratorio que nos permita introducirnos en el análisis de las Habilidades de visualización.

Las expectativas de futuros trabajos se centrarían en el diseño de actividades relacionadas con las habilidades de visualización. Combinar el trabajo realizado con la formación de maestros para darle importación a la visualización y al diseño de tareas, además de indagar en el conocimiento de los estudiantes de manera más específica, para aportar unos resultados más ricos al problema de investigación.

Referencias Bibliográficas

Acuña, C. y Larios, V. (2008). Prototypes and learning of geometry: A reflection on its pertinence and its causes. *Proceeding 11th International Congress in Mathematical Education*, Monterrey, 2008.

Alba, J. y Flores, P. (2009). *Matemáticas en una farola de Gran Vía*. Comunicación presentada en las XV Jornadas de investigación en el Aula de Matemáticas. Granada, Diciembre 2009.

Alba, J. y Flores, P. (2011). *Pata de Gallo, huella matemática*. Comunicación presentada en las XV Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM), Gijón, julio 2011.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52* (3), 215–241.

Bishop, A.J. (1989). Review of Research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11* (1), 7-16.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. (pp. 51-85), Barcelona: Horsori.

Cohen, L & Manion, L. (1990). *Métodos de Investigación Educativa.* Madrid: La Muralla.

Del Grande, J. (1987) Spatial Perception an Primary Geometry. En M.M. Lindquist (ed.), *Learning and Teaching Geometry* (K-12). (pp. 126-135), Reston, V.A.: NCTM .

Del Grande, J. J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic teacher, 37* (6), 14-20.

Dreyfus, T. (1995). Imagery for diagrams. En R. Sutherland y J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education*, *NATO ASI Series F, Computer and System Sciences, 138* (pp. 3-19). Berlin: Springer Verlag.

Forythe, K. (2012). Using dynamic geometry to gain fresh insight into how students visualise 2-dimensional shapes. *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, pp. 270. Taipei, Taiwan.

Gagatsis, A., Panaoura, A., Elia, I., Stamboulidis, N. y Spyrou, P. (2008). The axis of reflective symmetry as representation in mathematics learning. *Proceeding 11th International Congress in Mathematical Education*, Monterrey, 2008.

Gutiérrez, A. (1992). Procesos y habilidades de visualización espacial. En A. Gutiérrez (Ed.), *Memorias del tercer simposio internacional sobre investigación en educación matemática*. Geometría (pp. 44-59), México: CINVESTAV-PNFAPM.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, (pp. 3-19). Valencia, España.

Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En Flores, P, Ruiz, F. y De la Fuente, M. (Coords.) *Geometría para el siglo XXI*. (pp. 13-58). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y SAEM Thales.

Gutiérrez, J. (1997). Proyecto docente e Investigador para plaza de Profesor Titular de Universidad en el Área de Conocimiento de Métodos de Investigación y Diagnóstico en Educación. Granada: Universidad de Granada.

Guven, B., y Kosa, T. (2008). The effect of dynamic geometry software on student mathematics teachers' spatial visualization skills. *Turkish Online Journal of Educational Technology*, *7* (4), 100–107.

Hattermann, M. (2012).visualisation – the key element for expanding geometrical ideas to the 3d-case. *Proceeding 12th International Congress in Mathematical Education*, Korea, 2012.

Hershkowitz, R., Ben-Chaim, D., Hoyles, C., Lappan, G., Mitchelmore, M. y Vinner, S. (1989). Psychological aspects of learning geometry. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition* (pp. 70–95). Cambridge: University Press.

Hoffer, A. R. (1977). *Mathematics Resource Project: Geometry and Visualization.* Palo Alto, California: Creative Publications.

Lee, L.J., Cho, H.H. & Song, M.H. (2012). The role of turtle schemes for the process of the spatial visualization. *Proceeding 12th International Congress in Mathematical Education*, Korea, 2012.

MEC (2006). *REAL DECRETO 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria*. BOE num. 293 de 8 de diciembre de 2006, pp. 43053-43102.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principios y estándares para la educación matemática.* Cádiz: SAEM THALES.

Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2009). Mathematical creativity and cognitive styles. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4* (pp. 377-384). Thessaloniki, Greece: PME.

Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2010). Spatial versus Object Visualisation: The Case of Mathematical Understanding in Three-Dimensional Arrays of Cubes and Nets. *International Journal of Educational Research, 49* (2-3), 102-114.

Presmeg, N. (1994). The role of visually mediated processes in classroom mathematics. *Zentralblatt für Didaktic der Mathematick*, *26* (4), 114-117.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 205–235). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Presmeg, N. (2008, julio). *An overarching theory for research in visualization in mathematics education.* Comunicación presentada en 11th International Congress of Mathematical Education (ICME), Topic Study Group 20, Monterrey, México.

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de alumnos con talento matemático*. Tesis doctoral sin publicar. Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

Rodriguez, F., Montiel, G., Cantoral, R. (2008). Visualization in iterative processes. *Proceeding 11th International Congress in Mathematical Education*, Monterrey, 2008.

Soto, A. (2008). Mathematics as the art of seeing the invisible…, *Proceeding 11th International Congress in Mathematical Education*, Monterrey, 2008.

Rúbia, A. (2012). Video as resource for mathematical visualization PME.In Tso, T. Y. (Ed.). *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 4, pp. 246. Taipei, Taiwan.

Van Blerk, A., Christiansen, I., & Anderson, T. (2008) Learner's visual recognition of geometry theorems. *Proceeding 11th International Congress in Mathematical Education*, Monterrey, 2008.

Van Nes, F. & de Lange, J. (2012). Mathematics Education and Neurosciences Relating Spatial Structures to the Development of Spatial Sense and Number Sense. *Proceeding 12th International Congress in Mathematical Education*, Korea, 2012.

Zazkis, R., Dubinsky, E. y Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: a study of students´ understanding of the group D4. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27* (4), 435-457.

Zimmermann, W. Y Cunningham, S. (1991). "Editor´s introduction: What is mathematical visualization". En W. Zimmermann y Cunninghan (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 1-8). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Zodik, I. y Zaslavsky, O. (2007). Is a visual example in geometry always helpful? En J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4* (pp. 265-272). Seoul: PME.

Anexos.

Índice de los anexos.

BASES MATEMÁTICAS PARA LA EDUCACIÓN PRIMARIA

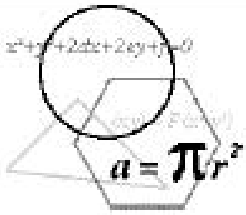
CUADERNO DE PRÁCTICAS

Curso 2010-2011

INFORMÁTICA

LABORATORIO

INDIVIDUAL



Tema 5: Geometría
Visión espacial

Nombre:

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

1

AULA INFORMÁTICA

Práctica A: Recursos interactivos para el estudio de las transformaciones geométricas

1. Introducción

Las transformaciones geométricas que conservan las distancias son las *traslaciones*, las *rotaciones*, las *reflexiones* y los *deslizamientos*, aunque éstos son una composición de traslación y reflexión.
De ellas, solamente la reflexión y el deslizamiento cambian la orientación de las figuras.

2. Objetivos

Los objetivos de esta práctica son:

a) Explorar y utilizar Geogebra para el estudio de las transformaciones geométricas llamadas isometrías.
b) Utilizar recursos en Internet de geometría dinámica para reconocer elementos relacionados con las isometrías del plano que están presentes en objetos y obras artísticas.

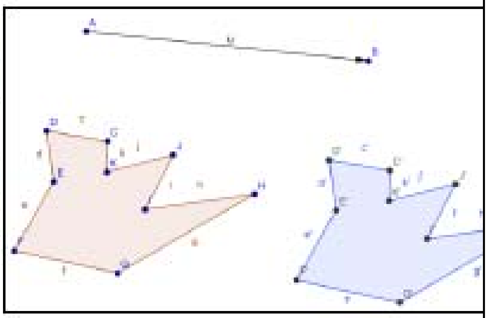
3. Bibliografía y recursos

Carrillo, J. y Contreras, L. C. (2001). Transformaciones geométricas. En, Enr. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria (pp. 427-448)*. Madrid: Síntesis.

Godino, J. D. y Ruiz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Edición en Internet: http://ww.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/. Disponible también en la fotocopiadora de la Facultad de Educación. Universidad de Granada.

4 Actividades

4.1 Traslaciones



Instala y abre el programa Geogebra. Construye un vector cualquiera, y un polígono parecido al de color marrón de la figura adjunta.
Somete a ese polígono a una traslación de vector u. Obtendrás algo parecido al polígono azul de la derecha, al que llamamos figura trasladada según el vector u.

¿Cómo es esta figura trasladada respecto al original?

¿Qué ha cambiado entre ambas figuras?

Modifica con el puntero el vector. ¿Qué le ocurre al polígono trasladado?

¿Puedes hacer que coincida con el polígono original? ¿Cómo?

Utiliza el puntero para desplazar el vector (sin modificarlo) hasta que su origen coincida con el punto C. ¿Dónde se sitúa el extremo del vector?

Repite este desplazamiento del vector con otros puntos. Decimos que los pares de puntos C y C'; D y D'; E y E', etc. son puntos homólogos de esta traslación.

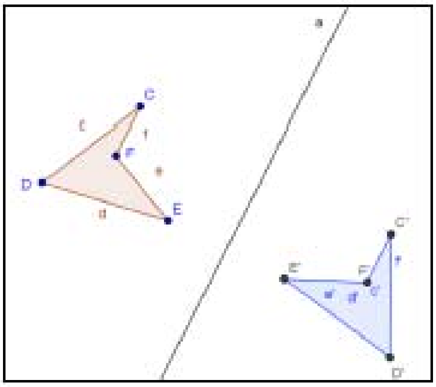
Define lo que entiendes por puntos homólogos en una traslación.

Ahora modifica con el puntero el polígono original, desplazando algún vértice. ¿Qué ocurre? Explícalo en términos de "puntos homólogos".

¿Qué se necesita para obtener la figura trasladada de otra?

4.2 Reflexiones (simetrías axiales)

Para hablar de reflexión necesitamos una recta, segmento o semirrecta. Traza una recta a que pase por dos puntos y que no sea vertical. Construye un cuadrilátero cóncavo, parecido al de la figura adjunta. Somete a esa figura a una reflexión cuyo eje sea la recta a.



Desplaza con el puntero el cuadrilátero original. ¿Qué le ocurre al cuadrilátero imagen o reflejado respecto de la recta a?

Modifica la pendiente y la posición de la recta a. ¿Qué les pasa a los dos cuadriláteros?

Mueve un vértice del cuadrilátero original. ¿Qué le ocurre a su homólogo? ¿Quién es su homólogo?

3

Une un vértice C con su homólogo C' mediante un segmento.

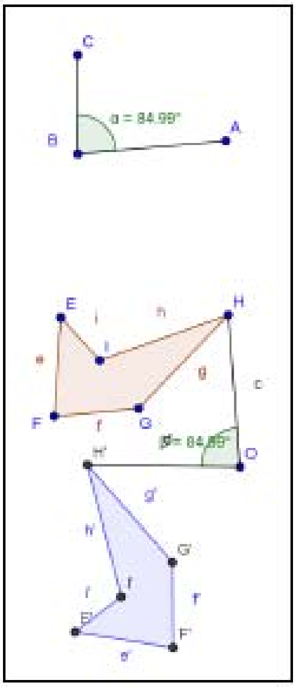
¿Cómo son entre sí CC' y el eje de reflexión?

¿Qué es la recta a (eje de simetría) respecto de ese segmento CC'?

Nombre el cuadrilátero original siguiendo el sentido antihorario, como por ejemplo en esta figura adjunta: C,D,E,F. Si respetas el sentido antihorario, ¿Cómo se nombra el cuadrilátero imagen?

Cuando esto ocurre se dice que esta transformación cambia la orientación de la figura y es un movimiento inverso. ¿Es la traslación un movimiento inverso? ¿Por qué?

Rotaciones



Para realizar rotaciones necesitamos un ángulo y un centro de giro O.

Construye dos segmentos AB y BC unidos por un extremo común B. Define el ángulo entre ellos (herramienta ángulo; nombra los puntos BCA en este orden). Verás que se define un ángulo α con su valor de amplitud, que puedes variar al mover los lados del ángulo.

Dibuja un polígono cualquiera y sitúa un punto fuera del polígono. Renombra ese punto con la letra O (clic derecho, renombrar). Este punto es el centro de giro.

Somete al polígono a un giro de centro O y ángulo α. Obtendrás algo parecido a la figura adjunta. Cambia el color de la figura girada.

Une mediante segmentos el punto O con un vértice y su homólogo. Por ejemplo OH y OH'. Mide el ángulo HOH' y comprueba que es idéntico al ángulo de giro que construiste al principio. Desplaza los lados del ángulo inicial modificando la amplitud del ángulo

¿Qué le ocurre a la figura girada?

¿Puedes hacer que coincidan ambas figuras? En ese caso ¿Cuándo mide el ángulo de giro?

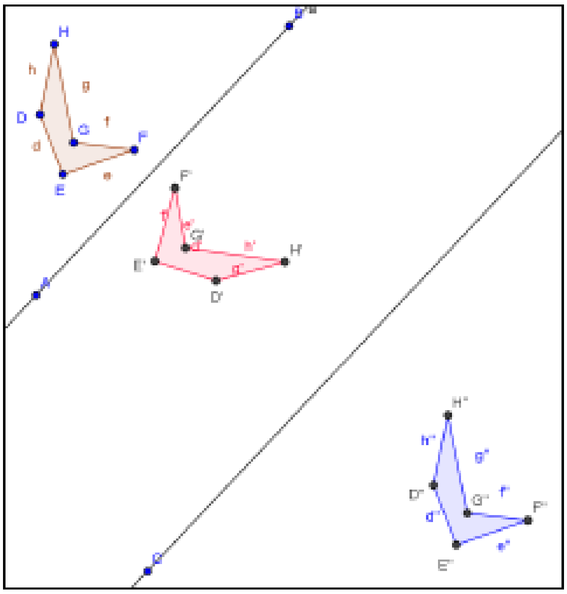
Nombre el polígono original siguiendo el sentido antihorario, como por ejemplo en esta figura adjunta: E,F,G,H,I. Si respetas el sentido antihorario, ¿Cómo se nombra el polígono imagen?

¿Es la rotación un movimiento directo o inverso? ¿Por qué?

Composición de transformaciones

Reflexiones de ejes paralelos

Traza dos rectas paralelas que no sean verticales. Dibuja en la parte izquierda (fuera de ambas rectas) un polígono. Realiza la reflexión de este polígono según el primer eje. Cambia el color de la figura obtenida (rojo). A continuación refleja la figura obtenida de la anterior reflexión en la otra recta. Cambia también su color (azul).



Nombra en sentido antihorario la figura original y la roja. ¿Ha cambiado la orientación? ¿Por qué?

Nombra también en sentido antihorario la figura azul ¿Ha cambiado su orientación respecto de la original? ¿Y respecto de la roja? ¿Por qué?

Une ahora mediante un vector dos puntos homólogos de la primera figura y la última (azul). (Por ejemplo H y H''). ¿Por qué otro punto pasa ese vector?

5

Cambia el color del polígono azul a blanco. Verás solamente los vértices. Realiza una traslación sobre el primer polígono según el vector que has trazado. ¿Qué ocurre? ¿Cómo interpretas lo que ha ocurrido?

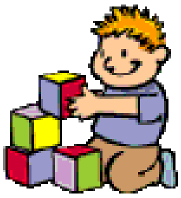
Mide el módulo del vector (HH') y compáralo con la distancia entre los ejes paralelos (MN). Para ello debes definir una variable llamada "cociente" y asignarle el valor HH'/MN. Escribe en la ventana de abajo lo siguiente:
cociente=distanciaHH'1/distanciaMN

En la ventana algebraica verás la variable "cociente" con valor 2. Desplaza los ejes y las figuras y comprueba que siempre ese valor es 2.

Enuncia la propiedad que has comprobado relacionando la composición de reflexiones de ejes paralelos con la traslación.

Realiza una experiencia similar cuando los ejes de reflexión se cortan en un punto O.

Enuncia el resultado que encuentras.



LABORATORIO **Práctica 5. Teselaciones**

1. Presentación

El objetivo principal de la enseñanza de la geometría es que el alumno se sitúe en el entorno físico. Para ello tiene que conocer elementos geométricos, que le sirven como referentes, y disponer de visión espacial. Así puede identificar los elementos en el entorno y emplearlos para relacionarse (comunicar formas, resolver problemas ligados a las relaciones espaciales, a las medidas, etc.).
En esta práctica vas a realizar análisis de formas del entorno, empleando para ello los movimientos planos. Y es que los movimientos se utilizan para formar las teselaciones, y otras regularidades del entorno, que observamos tanto en expresiones artísticas y técnicas, como en manifestaciones de la naturaleza.
La práctica se compone de dos partes. En la primera vas a estudiar las teselaciones obtenidas con polígonos regulares. En la segunda tienes que realizar un trabajo de investigación consistente en estudiar una teselación del entorno, el estampado "pata de gallo", que tanto se ha empleado en costura. Para este trabajo de investigación necesitas familiarizarte con los resultados del estudio de la primera parte de la práctica.
Para facilitar la identificación y construcción de teselaciones, vamos a emplear el polidrón, el libro de espejos, el papel transparente y los útiles de dibujo.

2. Objetivos

Con esta actividad se pretende que:

a) Desarrolles el sentido espacial y tu capacidad de observación y análisis.
b) Afiances habilidades de reconocimiento de formas, de búsqueda de características de esas formas, relaciones entre ellas, etc.
c) Te familiarices con los mosaicos y los movimientos planos que permiten obtenerlos.
d) Investigues algunos problemas geométricos a partir de situaciones del entorno.

3. Bibliografía

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J.M. (1988). *Materiales para construir la geometría*. Madrid, Síntesis.
Alsina, C., Pérez, R. y Ruiz, C. (1988). *Simetría dinámica*. Madrid. Síntesis.
http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/teselaciones.html
http://www.geometriadinamica.cl/tag/teselacion/

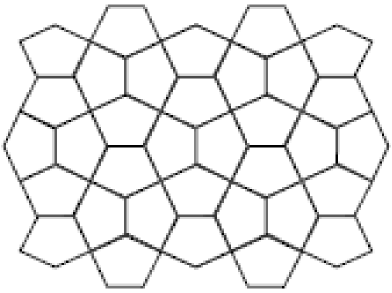
4. Actividades

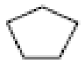
TESELACIONES CON POLÍGONOS REGULARES

Llamamos teselación a una regularidad o patrón de figuras planas que cubre o pavimenta completamente una superficie plana, de manera que no haya huecos ni solapamientos. Las figuras que la forman se llaman "teselas". Si las figuras son

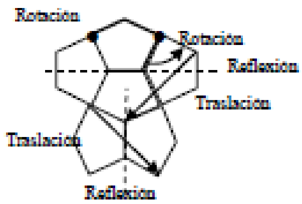
polígonos hablamos de teselaciones poligonales, que son la base para realizar otras más complejas.
Una teselación se forma a partir de una tesela, que al obtener sus transformadas por movimientos (mediante traslaciones, giros o rotaciones y reflexiones o simetrías), rellenan completamente el plano.

En la figura observamos una teselación formada por pentágonos irregulares convexos. Una tesela de la misma sería el pentágono, pues obteniendo sus simétricos, trasladados y girándolos, aparece la teselación completa.

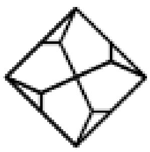




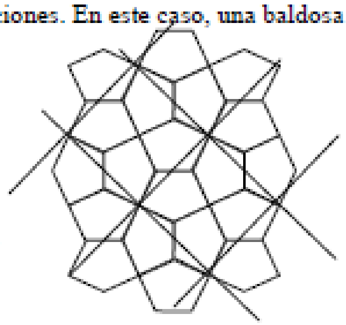
Tesela



La teselación se puede construir a partir de una baldosa, es decir, una figura que permite construirla mediante traslaciones. En este caso, una baldosa es la siguiente:



Baldosa de la teselación



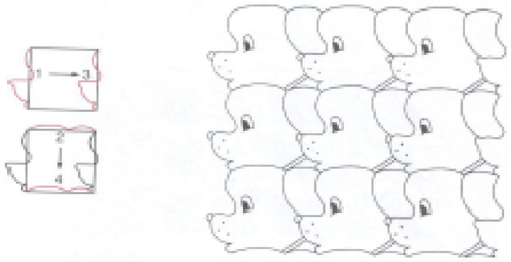
Llamamos **teselación regular** a la formada por polígonos regulares iguales.
Si se forman por dos o más polígonos regulares distintos, se llama **teselación semirregular** siempre que los vértices sean iguales (concurran los mismos polígonos en torno a los vértices).

1) Empleando el polidrón, estudiar qué polígonos regulares forman teselaciones regulares. ¿En qué características de los polígonos habrá que fijarse a la hora de indagar sobre teselaciones poligonales?

2) Determina y dibuja dos Teselaciones semirregulares. Identifica en cada una de ellas la tesela.

8

A partir de una teselación conocida podemos obtener otra teselación, transformando la tesela. Tal como se aprecia en la figura, podemos cambiar una tesela cuadrada añadiendo partes al cuadrado, que luego se quitan por otro lado.

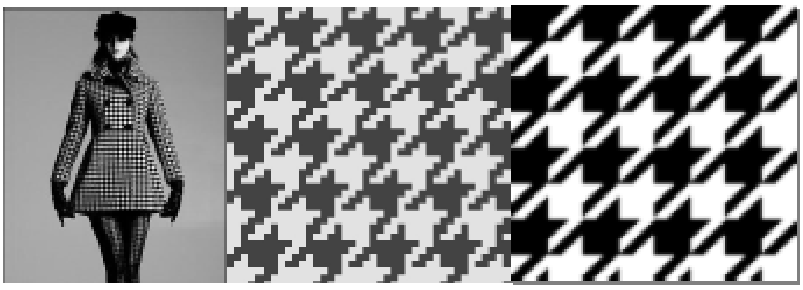


3) Inventa y dibuja una teselación formada por polígonos irregulares, a partir de una teselación regular cuadrada.

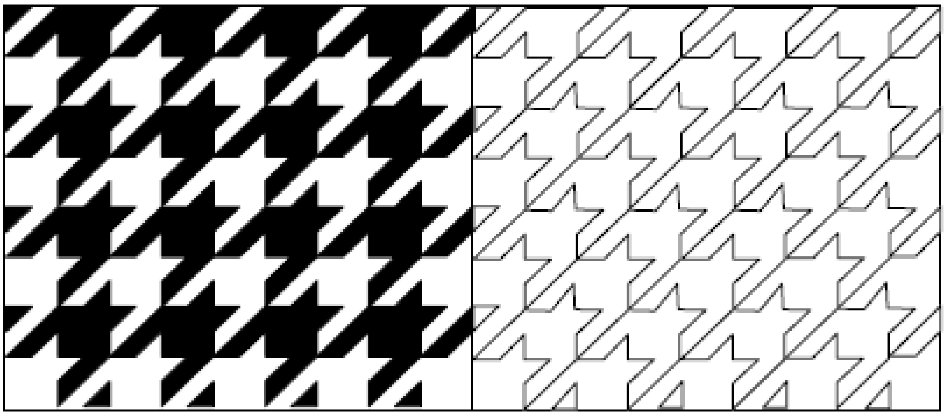
2. ESTUDIO DE LA PATA DE GALLO

Se llama "Pata de gallo" a un dibujo bicolor de ciertos tejidos, caracterizado por la repetición de pequeñas figuras abstractas de cuatro puntas que se asemejan a los tres dedos y el espolón de la pata de un gallo. Los colores tradicionales son el negro y el blanco, aunque en la actualidad otros colores sustituyen al negro. Proviene de la lana tejida de los Lowlands escoceses.

En las figura siguiente puedes ver una prenda de "pata de gallo", el dibujo en la lana, y su dibujo con líneas rectas. Puedes encontrar estudios sobre este estampado en la página: http://es.enc.tfode.com/Pata_de_gallo_%28dibujo_textil%29



El dibujo de la pata de gallo es el que aparece en el dibujo siguiente, en el que se ha trazado con el color y con la línea que delimita:



Esta segunda parte de la práctica consiste en realizar un ejercicio de investigación, en el que se analice la "pata de gallo" como una teselación.

a) Utilizando el *libro de espejos*, identifica una tesela de esta teselación, dibújala sobre un *papel transparente* y estudia qué tipo de polígono es, indicando su nombre.
b) Empleando la tesela dibujada en papel transparente, busca qué movimientos hay que aplicar a la tesela para obtener la teselación completa, identificando los elementos de estos movimientos (dónde está el

10

eje, caso de reflexiones, el centro y ángulo en caso de rotación y el vector, en las traslaciones).

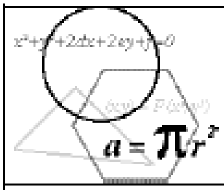
c) Busca y dibuja una baldosa con la que formar la pata de gallo sólo mediante traslaciones.
d) Relaciona la teselación de la pata de gallo con las teselaciones regulares obtenidas en la parte anterior, hasta encontrar un polígono regular que permita obtener la "pata de gallo". Identifica cómo hay que cambiar el polígono regular para formar la tesela de la pata de gallo.
e) Busca una baldosa con la forma de un polígono regular que permita obtener la teselación de la pata de gallo.
f) Dibuja con los útiles de dibujo la teselación de la Pata de gallo.

11

BASES MATEMÁTICAS PARA LA EDUCACIÓN PRIMARIA

CUADERNO DE PRÁCTICAS

Curso 2010-2011



T. 5. GEOMETRÍA VISIÓN ESPACIAL

LABORATORIO

EQUIPOS

Equipo:

Integrantes:

Fecha entrega

Calificación

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Estudio de la teselación La Pata de gallo

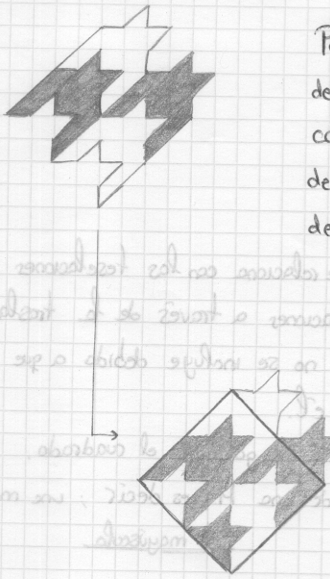
Realizar el informe final del estudio que habéis realizado sobre la teselación La pata de gallo.
Al menos hay que responder a las siguientes cuestiones:

a) Dibujar una tesela de esta teselación e indicar qué tipo de polígono es.
b) Señalar qué movimientos hay que aplicar a la tesela para obtener la teselación completa, identificando los elementos de estos movimientos (dónde está el eje, caso de reflexiones, el centro y ángulo en caso de rotación y el vector, en las traslaciones).
c) Dibujar una baldosa con la que formar la pata de gallo sólo mediante traslaciones.
d) Relacionar la teselación de la pata de gallo con las teselaciones regulares, indicando qué polígono regular permite obtener la "pata de gallo" y la forma en que hay que cambiar ese polígono regular para formar la tesela.
e) Dibujar una baldosa con la forma de un polígono regular que permita obtener la teselación de la pata de gallo.
f) Mostrar todo ello sobre un dibujo de la teselación de la Pata de gallo.

Podéis ampliar este estudio con nuevas alusiones geométricas a la teselación, como indicar algunas variaciones. Indicar la bibliografía o páginas en las que os habéis ayudado para este estudio.

Actividad	A			B	C			D		E			F			total
Grupo	OM	FC	RE	RE	OM	FC	RE	FC	RE	OM	FC	RE	OM	FC	RE	
1	2	2	2	2	2	2	1	0	0	0	0	0	2	2	2	10
2	1	1	2	1	2	2	2	0	0	2	2	0	1	1	2	12
3	2	2	2	2	2	2	0	0	0	2	2	0	2	2	2	11
4	0	0	0	1	2	2	0	1	2	2	2	0	2	2	2	10
5	2	2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	14
6	1	1	1	2	2	2	2	1	0	2	2	2	2	2	2	14
7	2	2	1	2	2	2	2	1	2	1	1	1	2	2	2	15
8	2	2	1	1	2	2	2	1	0	1	1	1	2	2	2	14
9	2	2	1	2	0	0	0	2	2	0	0	1	2	2	1	10
10	2	2	2	2	2	2	2	1	0	1	1	1	2	2	0	13
11	2	2	1	1	2	2	0	2	2	0	1	2	2	2	2	13
12	2	2	2	2	0	0	0	1	2	2	2	2	2	2	2	12
13	2	2	1	1	2	2	0	2	0	1	1	1	2	2	2	13

a)



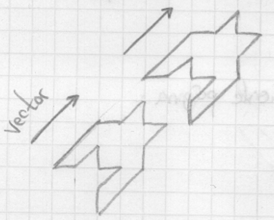
Para poder hacer la pata de gallo, debemos de formarla a través de un cuadrado; ya que como vemos en el dibujo; si quitamos los picos de la pata de gallo y los unimos a los huecos de la misma, formamos un cuadrado.

b)

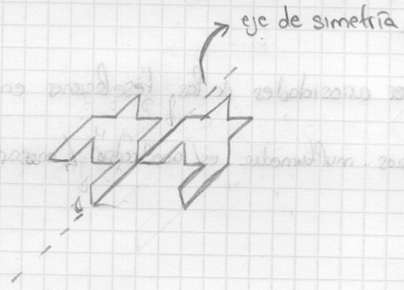
Para hacer la teselación completa a través de la tesela de la pata de gallo, hay que realizar los siguientes movimientos:

- El movimiento de traslación; cuyo vector es el lado de una de las patas de gallo de la figura, que equivale a la mitad del lado de un cuadrado.
- Simetría o reflexión; en el que su eje de simetría se ubica en paralelo al lado del cuadrado, del que se forma la pata de gallo.

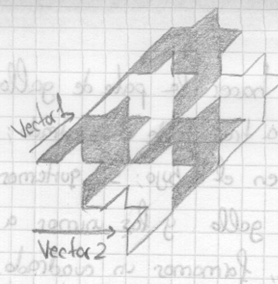
Traslación



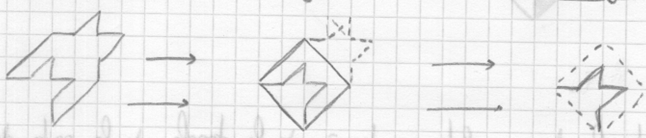
Simetría



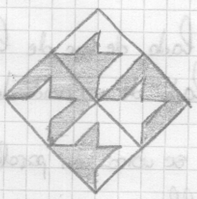
c)



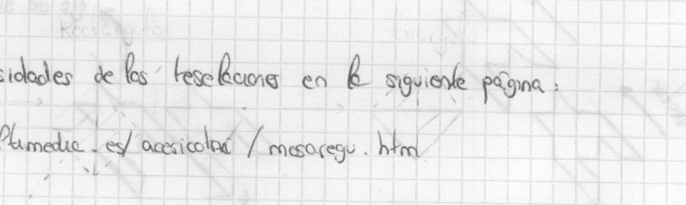
d) La teselación de la pata de gallo se relaciona con las teselaciones regulares debido a que ambas formas forman teselaciones a través de la traslación y la simetría. El movimiento de rotación no se incluye debido a que no se podría formar una teselación "completa" con él.
El polígono utilizado para formar la pata de gallo es el cuadrado.
Ese polígono se modifica con la escritura de una M, es decir, una m mayúscula



e)



f)



Podemos ver curiosidades de las teselaciones en la siguiente página:

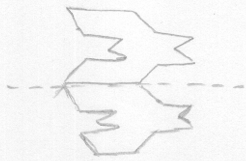
http://usuarios.multimedia.es/acesicolrá/mosaregu.htm

Estudio de la teselación La Pata de gallo.

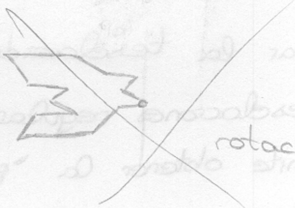
a) Dibujar una tesela de esta teselación e indicar qué tipo de polígono es.

Es un polígono irregular, de 14 lados

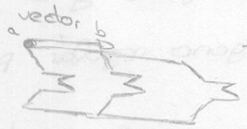
b) Señalar qué movimientos hay que aplicar a la tesela para obtener la teselación completa, identificando los elementos de estos movimientos.



eje de la reflexión

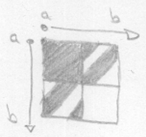


rotación



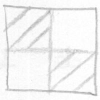
traslación

c) Dibujar una baldosa con la que se pueda formar la pata de gallo sólo mediante traslaciones.



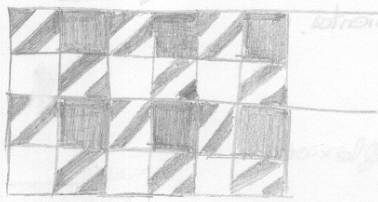
A partir de esta baldosa podemos construir toda la teselación mediante traslaciones de izquierda a derecha y de abajo - arriba.

d) ~~R~~Dibujar una baldosa con la forma de un polígono regular que permita obtener la teselación de la Pata de gallo.



Podemos obtener la teselación completa, a partir de cuadrados y medios cuadrados.

e) Mostrar todo ello sobre un dibujo de la teselación de la Pata de gallo.



f) Relacionar la teselación de la pata de gallo con las teselaciones regulares, indicando qué polígono regular permite obtener la "pata de gallo" y la forma en que hay que cambiar ese polígono regular para formar la tesela.

El polígono regular que se utiliza es el cuadrado. Para formar la tesela hay que formar una baldosa la cual está formada por un cuadrado blanco, otro negro y dos rayados.

Pata de Gallo. Huella matemática.

Jordi Alba Rodríguez

Pablo Flores Martínez

1. INTRODUCCIÓN.

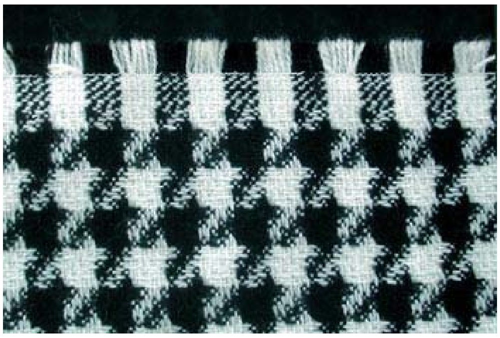
El interés por analizar los elementos matemáticos de nuestro entorno es un aspecto que debemos fomentar en nuestro alumnado, con el objetivo de formar personas críticas. Estos elementos matemáticos están presentes en las construcciones y transformaciones que existen en nuestro alrededor, ya sea de forma natural o como consecuencia de la manipulación de los seres vivos. Algunos ejemplos pueden ser el nido de abeja, estructuras arquitectónicas, señales de tráfico, la sucesión de *Fibonacci* en la naturaleza o en el entrelazado de de los hilos de las prendas que vestimos.

El entrelazado de los hilos y las figuras que generan el tejido acabado es uno de nuestros objetivos de investigación. Como más adelante veremos, estas técnicas han sobrevivido al paso del tiempo, se ha mejorado la maquinaria para su fabricación, pero no la técnica. La pata de gallo es un claro ejemplo de pervivencia como forma, y en la que veremos la multitud de elementos matemáticos que hay en un tejido. Partiendo de la forma final, hasta su fabricación con elementos matemáticos más básicos, podemos apreciar que entran en juego muchos elementos matemáticos interesantes, que pueden explotarse en la educación primaria.

La finalidad de la comunicación es estudiar contenidos geométricos que están presentes en este teselado para trabajarlos en Educación Primaria. Estamos llevando a cabo un análisis pormenorizado del tejido conocido como "Pata de Gallo", y diseñando actividades, adaptadas especialmente para el 3º ciclo de Educación Primaria.

Uno de los objetivos que se recoge en el Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria (MEC, 2006) es: *Identificar formas geométricas del entorno natural y cultural, utilizando el conocimiento de sus elementos y propiedades para describir la realidad y desarrollar nuevas posibilidades de acción.*

Queremos hacer propuestas didácticas basadas en el trabajo de elementos geométricos a través del análisis del entorno (Alsina y otros 1988), partiendo de la figura final, como forma que rellena el plano, y llegando a estudiar algunas matemáticas que aparecen en la forma de enlazar los hilos para generar la figura que vemos en los tejidos (figura 1).



(Figura 1: Pata de Gallo en tejido:

http://mediateca.educa.madrid.org/imagen/ver.php?id_imagen=o6i9pb29ui7wlm7h)

La presente comunicación es fruto del trabajo de una “Beca Iniciación a la Investigación” de la Universidad de Granada, dentro al Departamento de Didáctica de las Matemáticas, dirigida por Pablo Flores Martínez y becario Jordi Alba Rodríguez.

2. CONTENIDOS MATEMÁTICOS.

Comenzamos por examinar qué contenidos matemáticos aparecen en el currículo de Educación Primaria sobre la geometría, especialmente aquellos que podemos afrontar con el estudio del teselado que hemos seleccionado.

2.1 Normativa vigente

Algunos de los Contenidos Matemáticos que proponemos trabajar con el tejido “Pata de Gallo” se encuentran dentro del Real Decreto 1513/2006 (MEC, 2006), especialmente en el tercer ciclo de Educación Primaria.

En su redacción apreciamos algunos elementos que nos sugieren cómo debemos enseñar la geometría en Educación Primaria. De la introducción al bloque de geometría destacamos los siguientes párrafos:

A través del estudio de los contenidos del bloque 3, Geometría*, el alumnado aprenderá sobre formas y estructuras geométricas. (..) La geometría es describir, analizar propiedades, clasificar y razonar, y no sólo definir. (..) El aprendizaje de la geometría requiere pensar y hacer, y debe ofrecer continuas oportunidades para clasificar de acuerdo a criterios libremente elegidos, construir, dibujar, modelizar, medir, desarrollando la capacidad para visualizar relaciones geométricas. Todo ello se logra, estableciendo relaciones constantes con el resto de los bloques y con otros ámbitos como el mundo del arte o de la ciencia, pero también asignando un papel relevante a la parte manipulativa a través del uso de materiales (geoplanos y mecanos, tramas de puntos, libros de espejos, material para formar poliedros, etc.) y de la actividad personal realizando plegados, construcciones, etc. para llegar al concepto a través de modelos reales. A este mismo fin puede contribuir el uso de programas informáticos de geometría dinámica.*

Situados en el tercer ciclo, los contenidos del bloque 3, Geometría señalan:

La situación en el plano y en el espacio, distancias, ángulos y giros.

- *Ángulos en distintas posiciones.*
- *Sistema de coordenadas cartesianas. Descripción de posiciones y movimientos por medio de coordenadas, distancias, ángulos, giros...*
- *La representación elemental del espacio, escalas y gráficas sencillas.*
- *Utilización de instrumentos de dibujo y programas informáticos para la construcción y exploración de formas geométricas.*

Formas planas y espaciales

- *Relaciones entre lados y entre ángulos de un triángulo.*
- *Formación de figuras planas y cuerpos geométricos a partir de otras por composición y descomposición.*
- *Interés por la precisión en la descripción y representación de formas geométricas.*

Regularidades y simetrías

- *Reconocimiento de simetrías en figuras y objetos.*
- *Trazado de una figura plana simétrica de otra respecto de un elemento dado.*
- *Introducción a la semejanza: ampliaciones y reducciones.*

- *Interés y perseverancia en la búsqueda de soluciones ante situaciones de incertidumbre relacionadas con la organización y utilización del espacio. Confianza en las propias posibilidades para utilizar las construcciones geométricas y los objetos y las relaciones espaciales para resolver problemas en situaciones reales.*
- *Interés por la presentación clara y ordenada de los trabajos geométricos.*

De todos ellos extraemos las siguientes apreciaciones (Alsina y otros 1988):

- La enseñanza y aprendizaje de la geometría deben basarse en el estudio de figuras del entorno, realizando las acciones previstas: *describir, analizar propiedades, clasificar y razonar,* mediante *la acción, la manipulación y el razonamiento*.
- Su estudio debe relacionarse con el de otros bloques y con el empleo de elementos tecnológicos, especialmente con programas de geometría dinámica
- Los contenidos del tercer ciclo determinan tres aspectos de la geometría: el estudio de la *orientación espacial* (formas de ubicar las figuras en el espacio), *identificación y caracterización de figuras* y el análisis de las *regularidades y transformaciones* entre figuras.
- Es importante que el alumno construya figuras, con vistas a resolver problemas reales.

Con estas perspectivas, analizar qué figuras conforman un tejido resulta especialmente adecuado en este nivel educativo, dado que:

- Parte de un problema real, el dibujo de los tejidos, un teselado importante para cubrir dos aspectos, la estética (evitar la monotonía de los tejidos lisos aprovechando la regularidad de una repetición con elementos armónicos), y la economía de esfuerzo (repetir un motivo simplifica su diseño).
- Da la ocasión de realizar las acciones indicadas en el currículum: *describir* las formas y sus posiciones*, analizar sus propiedades* para identificar qué movimientos las generan*, clasificarlas* de acuerdo a diversos criterios *y razonar* su origen y relación con otras formas más familiares*,* siempre mediante *la acción, la manipulación y el razonamiento*.
- La construcción de las figuras que generan el tejido arranca con la identificación de elementos, para pasar a buscar la forma de generarla por medio de dibujos de regla y compás, terminando con su construcción empleando programas de geometría dinámica, como el geogebra, en un proceso que pueden realizar alumnos aventajados del tercer ciclo de primaria.
- Abarca el estudio de formas, pero también el de las regularidades y simetrías, valiéndose para ello de una urdimbre que se puede constituir en ejes de referencia con los que ubicar cada pieza en el entramado.
- Su estudio supone familiarizarse con los elementos geométricos anteriores, pero también iniciarse en otros elementos matemáticos (incluso externos al currículo), que ayudan a mostrar la naturaleza cultural y científica de las matemáticas, cuyo papel científico principal es crear modelos para interpretar la realidad de una manera más simpe. Esto se verá reflejado en el estudio de los enlazados que aparecen en el tejido.

3. PATA DE GALLO.

Para el estudio de este motivo, vamos a comenzar por caracterizarlo a partir de su dimensión real y el tejido. Tras caracterizarlo, vamos a examinar la forma matemática ideal que la constituye, que estudiaremos con detenimiento, pasando a realizar su construcción por diversos medios.

La **Pata de Gallo** es el dibujo bicolor de ciertos tejidos, caracterizado por la repetición de pequeñas figuras que sugieren cuadrados partidos. Los colores tradicionales son el negro y el blanco, aunque en la actualidad otros colores sustituyen al negro.

La pata de gallo (*hounds-tooth* en inglés, literalmente *diente de perro de caza)* proviene de la lana tejida de los Lowlands escoceses, aunque hoy en día se emplean muchos otros materiales. La pata de gallo tradicional se obtiene al alternar bandas de cuatro hilos claros con cuatro oscuros en un telar de urdimbre y trama con un trenzado sencillo 2:2, esto es, dos hilos por encima de la urdimbre y dos por debajo, avanzando un hilo en cada paso (figura 2). Parte de realizar una urdimbre de bandas de cuatro hilos, alternando el blanco y el negro (figura 3). Lo cruzamos con la lanzadera que da cuatro pasos de cada color, con la regularidad expresada (pasando 2 por encima y 2 por debajo, avanzando un hilo).

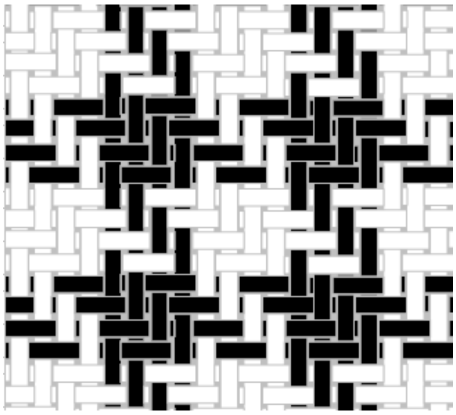


Figura 2: Enlazado de la Pata de Gallo

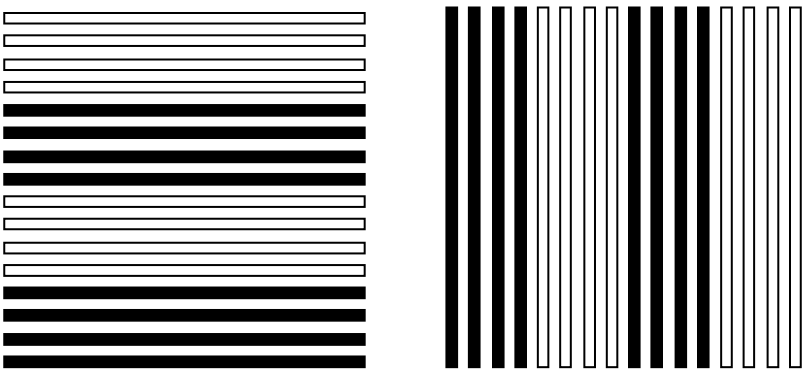


Figura 3: Urdimbre y lanzadera en la Pata de Gallo

Desde el punto de vista matemático, una composición que rellena el plano es conocida como teselado. Un **teselado** o teselación es una regularidad o patrón de figuras que cubre o pavimenta completamente una superficie plana cumpliendo con dos requisitos: que no queden huecos y que no se superpongan las figuras (O'Daffer y Clemens, 1976, Clemens et al., 1988).

Los teselados han sido utilizados en todo el mundo desde los tiempo más antiguos para recubrir suelos y paredes, e igualmente como motivos decorativos de muebles, alfombras, tapices, ropas,...

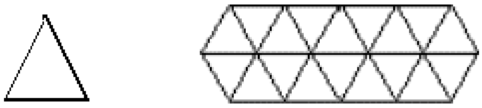
También muchos artistas han utilizado teselados en su trabajo: M.C. Escher es, probablemente, el más famoso de todos ellos. El artista holandés se divirtió teselando el plano con figuras de intrincadas formas, que recuerdan pájaros, peces, animales...

Como es fácil de imaginar, la diversidad de las formas de las piezas teselantes es infinita. Los matemáticos y en particular los geómetras se han interesado especialmente por los teselados poligonales; incluso las más sencillas de estas plantean problemas colosales.

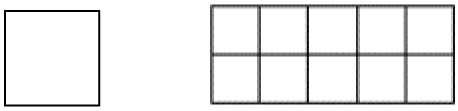
Para estudiar los teselados hay que recurrir a criterios para delimitarlas. Cuando todos los polígonos del teselado son regulares e iguales entre sí, se dice que el teselado es regular.

Para que una sola figura rellene el plano, tiene que ocurrir que sus ángulos sean divisores de 360º (Alsina y otros, 1991). Es por esto que sólo existen tres teselados regulares: la malla de triángulos equiláteros, el reticulado cuadrado como el del tablero de ajedrez y la configuración hexagonal, como la de los panales (figura 4).

Teselado de Triángulos



Teselado de Cuadrados



Teselado de Hexágonos

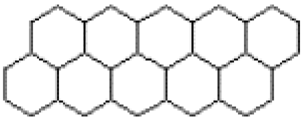


Figura 4: Teselados regulares

Existen teselados formados por dos o más polígonos regulares, a las que llamamos semiregulares. De manera precisa, definimos teselado semiregular como aquel que está formada sólo por polígonos regulares, siendo el arreglo de polígonos en cada vértice idéntico. De esta forma sólo existen 8 teselados semiregulares. Por último llamamos teselados no regulares a los formados por polígonos irregulares (Clemens et al., 1988, O'Daffer y Clemens, 1976).

La Pata de Gallo es un teselado no regular. Para estudiarlo comenzamos por identificar la figura que lo forma.

La Pata de Gallo está formada por un polígono con las siguientes características (figura 5):

- Es un polígono irregular
- 14 ángulos o vértices: 9 convexos y 5 cóncavos
- Todos los ángulos son múltiplos de 45º
- 14 lados

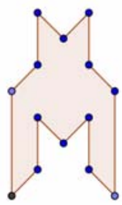
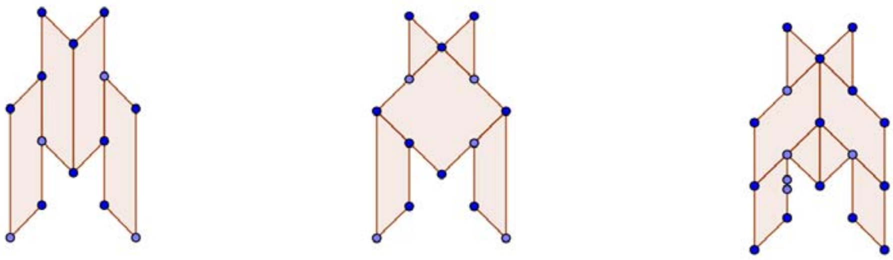


Figura 5: Polígono que genera la Pata de Gallo

Para estudiar este polígono, vemos cómo se puede formar o qué figuras contienen el polígono (figura 6).



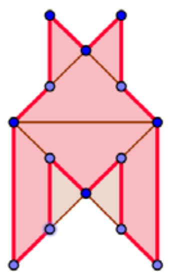
Formado con paralelogramos

Formado con paralelogramos, triángulos y cuadrados

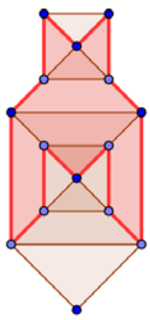
Formado con paralelogramos y triángulos rectángulo isósceles

Figura 6: Descomposición del polígono de Pata de Gallo en polígonos más familiares

También se pueden formar utilizando los lados y vértices de polígonos conocidos como con cuadrados y triángulos rectángulos e isósceles (medios cuadrados) (figura 7).



Con triángulos.



Con cuadrados.

Figura 7: Formación del polígono de la Pata de Gallo a partir de cuadrados y triángulos rectángulos isósceles

Analizar la pieza que genera el teselado completo es una tarea interesante que exige identificar una figura en el contexto. El proceso contrario, pasar a formar el teselado completo a partir de la figura, es otra tarea interesante para estudiar las regularidades en las figuras del entorno. Para llevar a esta construcción tenemos que hacer uso de los movimientos en el plano o isometrías.

Un movimiento o isometría es una transformación que conserva las medidas (*iso* "igual", *metría* "medida"), en nuestro caso, las distancias y los ángulos, por lo que preserva el tamaño y la forma (Alsina et al. 1991, Clemens et al., 1988). En el cuadro 1 recogemos las tres isometrías principales: la traslación, la rotación o giro y la reflexión o simetría axial, indicando en cada una sus elementos y definiciones

Cuadro 1: Tipos de isometrías		
Nombre	Definición	Elementos
Traslación	Isometría en que todos los puntos se desplazan una distancia fija hacia sus imágenes a lo largo de trayectorias paralelas.	Vector
Rotación	Isometría en que todos los puntos giran un ángulo constante con respecto a un punto fijo.	El punto fijo se denomina centro de rotación y la cantidad de giro se denomina ángulo de rotación
Reflexión	Isometría en que todos los puntos son	Eje o recta de reflexión

	enviados a sus imágenes reflejadas con respecto a una recta de reflexión, que actúa como espejo	

A continuación comprobaremos como se puede forma el polígono irregular de la Pata de Gallo.

- Solo con triángulos rectángulos isósceles (figura 8).

Paso a paso. Dibujamos un triángulo rectángulo e isósceles; realizamos una reflexión con eje horizontal; sobre el triángulo resultante dibujamos otro triángulo isósceles rectángulo utilizando el punto medio del triángulo anterior para obtener los lados de éste; realizamos una reflexión de este triángulo respecto un eje vertical; realizamos una rotación del segundo triángulo, con centro en cada uno de los vértices de ángulos iguales y amplitud de 90º y 90º; para terminar dibujamos una reflexión de los triángulos superiores respecto a la hipotenusa del primer triángulo dibujado.

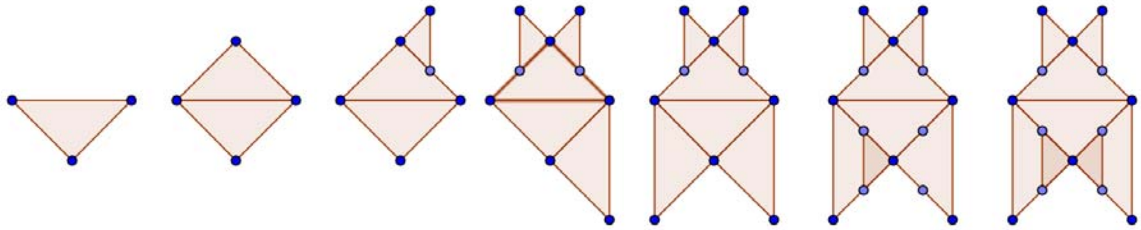


Figura 8: Formación del polígono de la Pata de Gallo con triángulos isósceles.

- Solo con cuadrados (figura 9).

Paso a paso. Dibujamos un cuadrado; ahora dibujamos otro cuadrado de diagonal igual al lado del cuadrado anterior y le hacemos una reflexión respecto a una paralela media horizontal del primer cuadrado; a continuación dibujamos un cuadrado mitad, uniendo los puntos medios de las semidiagonales del cuadrado original y le realizamos una reflexión respecto al lado superior del cuadrado inicial; sobre estos trazos ya podemos dibujar la Pata de Gallo

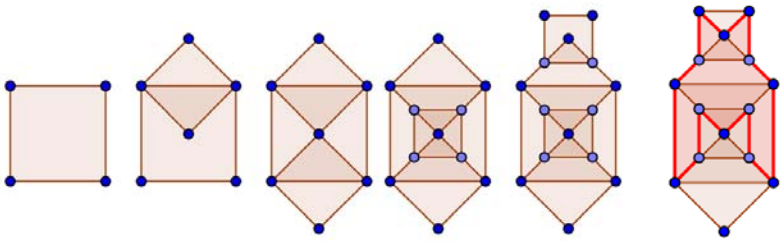


Figura 9: Formación del polígono de la Pata de Gallo con cuadrados.

Ahora veremos cómo se genera todo el teselado a partir del polígono. En esta parte estudiaremos los movimientos e isometrías que nos llevan a la creación del teselado de la Pata de gallo.

Comenzamos con la figura original (figura 10); la giramos 45º respecto a uno de sus vértices (figura11); y ahora comienza el teselado, haciendo traslaciones de vector v (figura 12), de módulo la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles que hemos empleado en su construcción, y luego con traslaciones de vector u, perpendicular al v y con el mismo módulo (figura 13), para llegar al teselado final de la Pata de Gallo (figura 14).

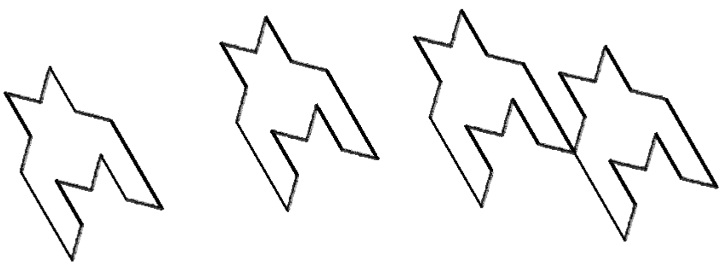


Figura 10.

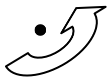


Figura 11.

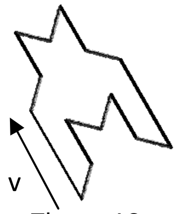


Figura 12.

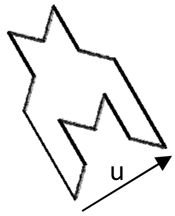


Figura 13.

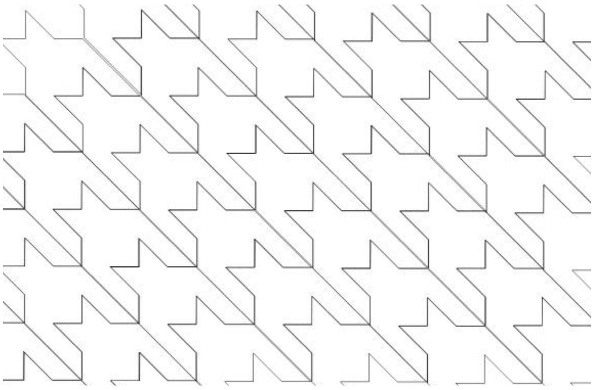


Figura 14, teselado final.

En lugar de la segunda traslación, se puede obtener por reflexión respecto a rectas con la dirección de v, situadas sobre los lados de la figura que corresponden con los catetos del triángulo rectángulo e isósceles con el que hemos dibujado la tesela.

El que la construcción del teselado no sea única se debe a que tiene ciertas regularidades. Si observamos la figura 14 veremos que resulta invariante al aplicarle una traslación de vector v. También resulta el dibujo cuando aplicamos una traslación de vector u (y múltiplos enteros de u y v, naturalmente). Igualmente observamos que el teselado se reproduce cuando aplicamos reflexiones de ejes según la dirección del vector v, situados en los lados más externos de la tesela. Sin embargo no es simétrico respecto a rectas que tengan la dirección del vector u, pues la figura original tiene un solo eje de simetría, que tiene la dirección del vector v y que se encuentra entre los vértices de ángulos rectos de los dos triángulos iniciales de su construcción.

Otro estudio interesante de esta figura consiste en buscar si es un teselado tipo Escher, es decir, se puede obtener a partir de un teselado regular. El estudio de la tesela, en la que hemos apreciado que todos los ángulos son múltiplos de 45º, junto con la construcción obtenida, siempre a partir de cuadrados (y medios cuadrados, es decir, triángulos rectángulos e isósceles), nos lleva a pensar en que deriva del teselado cuadrado. Ahora mostramos cómo se genera, (figura 15). Se puede ver como quitando y añadiendo las distintas piezas se puede obtener la figura original. Hemos dibujado 8 maneras diferentes, pero el proceso es continuo, luego el cuadrado puede situarse en una posición intermedia a las dibujadas.

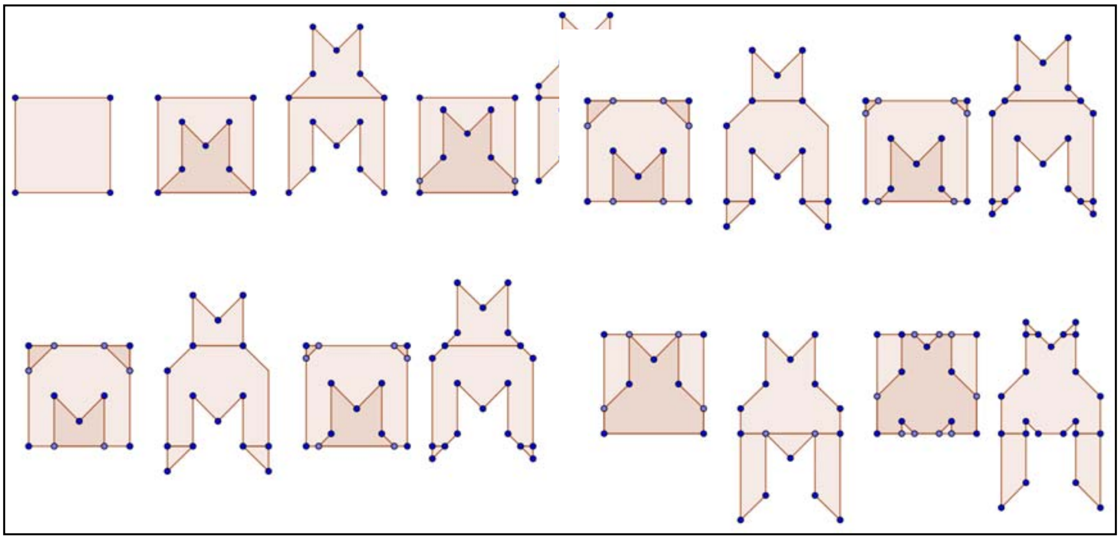


Figura 15. Construcción a partir de la figura que la genera.

4. CONCLUSIONES.

Como hemos indicado anteriormente para fomentar la actitud matemática las actividades deben

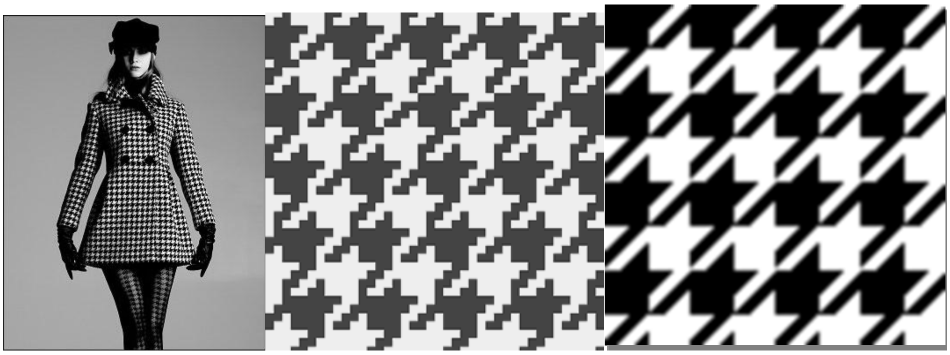
- Partir de un problema real, que es el análisis e interpretación de la construcción y las formas geométricas que genera el tejido de la Pata de Gallo. Un tejido que genera el teselado que nos ha servido para poner en práctica los conocimientos previstos del currículo vigente, para despertar los intereses geométricos del alumnado. También hemos podido ver como con el entrelazado de solo dos hilos se puede obtener un teselado que ha perdurado a través de los tiempo y sigue siendo un tejido no ha perdido presencia en la actualidad.
- Damos la ocasión de realizar las acciones indicadas en el currículum, a través de la construcción del teselado, el análisis de las distintas figuras geométricas y los pasos que se deben seguir para su composición, poniendo en práctica los conceptos matemáticos expuestos. Por otro lado despierta el interés de los alumnos por descubrir cómo se genera el teselado, además de ejercitarse en la clasificación por criterios matemáticos. Y todo esto es posible mediante una metodología participativa y manipulativa.
- La construcción de las figuras que generan el tejido permiten identificar figuras geométricas y recrearlas con materiales básicos como son el dibujos de regla y compás, para profundizar en la construcción por medios de programas de geometría dinámica, como Geogebra, pues su construcción es relativamente sencilla.
- El estudio de formas se puede llevar a cabo a través de la de trama y la urdimbre, con las que se puede trabajar los conceptos de las regularidades y simetrías, mediante el entrelazado de hilos.
- Se puede ver cómo se utilizan unos conceptos de cursos anteriores más básicos y otros conocimientos culturales externos al currículum (análisis del tejido), pero que nos han permitido trabajar los contenidos educativos.
- Con estas actividades se pretende crear una actitud científica mediante el análisis que hemos realizado de un aspecto cotidiano para profundizar en los aspectos matemáticos.

Lo que hemos presentado es una parte del trabajo que estamos realizando. De momento hemos comenzado por plantear una propuesta didáctica que se ha empleado como actividad práctica en la asignatura Bases Matemáticas, que se imparte en el primer curso del grado de Maestro de Educación Primaria, en la Universidad de Granada. El enunciado de esta propuesta aparece en el cuadro 2. La práctica comienza con el estudio de los teselados, los teselados regulares y los teselados tipo Escher (Alsina y otros 1991 y O'Daffer y Clemens, 1976). Tras estudiar lo que es un teselado se propone el estudio de la Pata de Gallo como un ejemplo de su aparición en la vida cotidiana, promoviendo realizar un estudio de investigación.

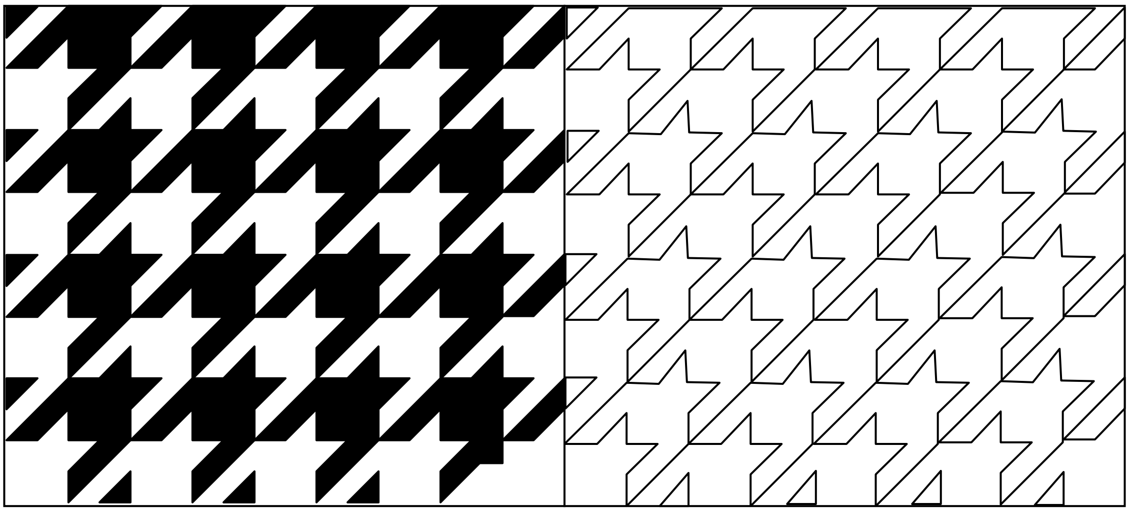
2. ESTUDIO DE LA PATA DE GALLO

Se llama "Pata de gallo" a un dibujo bicolor de ciertos tejidos, caracterizado por la repetición de pequeñas figuras abstractas de cuatro puntas que se asemejan a los tres dedos y el espolón de la pata de un gallo. Los colores tradicionales son el negro y el blanco, aunque en la actualidad otros colores sustituyen al negro. Proviene de la lana tejida de los Lowlands escoceses.

En las figuras siguientes puedes ver una prenda de "pata de gallo", el dibujo en la lana, y su dibujo con líneas rectas. Puedes encontrar estudios sobre este estampado en la página: http://es.enc.tfode.com/Pata_de_gallo_%28dibujo_textil%29



El dibujo de la pata de gallo es el que aparece en el dibujo siguiente, en el que se ha trazado con el color y con la línea que delimita:



Esta segunda parte de la práctica consiste en realizar un ejercicio de investigación, en el que se analice la “pata de gallo” como un teselado.

a) Utilizando el libro de espejos, identifica una tesela de este teselado, dibújala sobre un papel transparente y estudia qué tipo de polígono es, indicando su nombre.
b) Empleando la tesela dibujada en papel transparente, busca qué movimientos hay que aplicar a la tesela para obtener el teselado completo, identificando los elementos de estos movimientos (dónde está el eje, caso de reflexiones, el centro y ángulo en caso de rotación y el vector, en las traslaciones).
c) Busca y dibuja una baldosa con la que formar la pata de gallo sólo mediante traslaciones.
d) Relaciona el teselado de la pata de gallo con los teselados regulares obtenidos en la parte anterior, hasta encontrar un polígono regular que permita obtener la “pata de gallo”. Identifica cómo hay que cambiar el polígono regular para formar la tesela de la pata de gallo.
e) Busca una baldosa con la forma de un polígono regular que permita obtener el teselado de la pata de gallo.
f) Dibuja con los útiles de dibujo el teselado de la Pata de gallo.

Realiza el informe final del estudio que has realizado sobre el teselado pata de gallo.

Puedes ampliar este estudio con nuevas alusiones geométricas al teselado, como indicar algunas variaciones. Indica la bibliografía o páginas de las que te has ayudado.

Como continuación del trabajo en la beca, tenemos previsto continuar el estudio de la Pata de Gallo desde la perspectiva de los enlazados, empleando elementos básicos de teoría de nudos y enlazados. Igualmente debemos completar el estudio presentado sobre el teselado, mediante el análisis del dibujo bicolor, pues lo presentado en la comunicación sólo abarca las líneas que lo delimitan. Igualmente afrontamos analizar las respuestas que han dado los estudiantes de magisterio a esta práctica, examinando qué destrezas geométricas han puesto en juego, concretándolas en examinar las habilidades visuales que puede ayudar a desarrollar el estudio de situaciones como la planteada.

BIBLIOGRAFÍA.

Alsina, C.; Pérez, R.; Ruiz, C.; “Simetría Dinámica”. Madrid: Editorial Síntesis, 1991.

Alsina, C.; Burgués, C.; Fortuny, J.M.; “Materiales para construir la geometría”. Madrid: Editorial Síntesis, 1988.

Clemens, S.R.; O'Daffer, P.; Cooney, T.J.; “Geometría con aplicaciones y solución de problemas”. México (México): Addison Wesley Iberoamericana, 1988. ISBN 0-201-64407-X

O'Daffer, P.; Clemens, S.R.; “Laboratory Investigations in Geometry”. London (England): Addison Wesley, 1976. ISBN 0-201-05421-3

[i] La dibuja en la siguiente actividad
[ii] Dibuja una baldosa triangular
[iii] Al identificarla en blanco y negro y también en líneas destaca un mayor grado de visualización.
[iv] Al identificarla en blanco y negro y también en líneas destaca un mayor grado de visualización.